

PROJETO DE CONTROLADORES FUZZY CHAVEADOS USANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY MÚLTIPLAS

FLÁVIO A. FARIA*, MICHELE C. VALENTINO[†], VILMA A. OLIVEIRA[‡]

**Instituto de Química, UNESP Univ Estadual Paulista
Campus Araraquara*

[†]*Universidade Federal de Juiz de Fora
Campus Governador Valadares*

[‡]*Universidade de São Paulo, Campus São Carlos*

Emails: flaviof15@iq.unesp.br, michele.valentino@ufjf.edu.br, vilma@sc.usp.br

Abstract— Using multiple fuzzy Lyapunov functions and Lyapunov-Metzler inequalities, a sufficient condition for PDC controllers is given. The approach ensures the stabilisation of switched TS fuzzy systems by solution of linear matrix inequalities. A numerical example illustrates the efficiency of the proposed result.

Keywords— PDC fuzzy controllers, switched TS fuzzy systems, fuzzy Lyapunov functions, Lyapunov-Metzler inequalities.

Resumo— Usando funções de Lyapunov fuzzy múltiplas e desigualdades de Lyapunov-Metzler, uma condição suficiente para o projeto de controladores PDC é proposta. O método assegura a estabilização de sistemas fuzzy TS chaveados através da solução de desigualdades matriciais lineares. Um exemplo numérico ilustra a eficiência do método proposto.

Palavras-chave— Controladores fuzzy PDC, sistemas fuzzy TS chaveados, funções de Lyapunov fuzzy, desigualdades de Lyapunov-Metzler.

1 Introdução

Nos últimos anos sistemas chaveados têm sido bastante estudados. As aplicações vão desde simples problemas acadêmicos a complexos processos industriais, tais como, controle de aeronaves, controle de tráfego aéreo e controle de processos químicos (Chiou et al., 2010). Além disso, o chaveamento de sistemas produz características e comportamentos não encontrados nos subsistemas isolados. Por exemplo, um sistema chaveado que possui todos os subsistemas estáveis pode apresentar trajetórias divergentes para certas leis de chaveamento, ou o contrário, um chaveamento adequado pode estabilizar um sistema chaveado que possua subsistemas instáveis (Colaneri et al., 2008). Consequentemente, uma questão importante para o problema de estabilidade de sistemas chaveados diz respeito à lei de chaveamento a ser adotada. Este trabalho é focado em leis de chaveamento dependentes dos estados (do inglês “state-driven switching method”), ou seja, os estados são usados como sinais de controle para determinar uma regra de chaveamento que em conjunto com um controlador fuzzy PDC (do inglês, “Parallel Distributed Compensation”) assegurem a estabilização do sistema em malha fechada.

Controladores fuzzy PDC representam uma ferramenta simples e eficiente para a abordagem de projetos de controle em sistemas fuzzy Takagi Sugeno (TS) (Takagi and Sugeno, 1985). Essa metodologia consiste em projetar um controlador linear para cada modelo local do sistema fuzzy TS, e então, obter o controlador global a partir de uma combinação fuzzy dos controladores locais (Tanaka and Wang, 2001).

A estratégia de combinar a lei de chaveamento com um controlador PDC para estabilizar um sistema fuzzy TS chaveado ainda foi pouco explorada e, em geral, os resultados encontrados na literatura usam uma função de Lyapunov

quadrática (FLQ) simples (Yang et al., 2008; Chiou et al., 2010; Ojleska et al., 2011) ou múltipla (Shuliang et al., 2009; Jabri et al., 2012) para o projeto do controlador. No entanto, já é conhecido que FLQs conduzem a resultados conservadores e que em certos casos não é possível encontrar uma FLQ para um sistema estável. Uma maneira simples de obter condições menos conservadoras para o projeto de controladores PDC consiste em usar funções de Lyapunov fuzzy (FLFs). Essa classe de funções permite usar propriedades de funções de pertinência (FPs) para adicionar variáveis de folga nas restrições LMI do problema. Em Faria et al. (2013a) e Faria et al. (2013b) foram propostos métodos baseados em FLFs que obtêm resultados menos conservadores que os existentes em Chiou et al. (2010). A estratégia utilizada nos trabalhos citados acima consiste em usar um sistema auxiliar formado por uma combinação convexa dos subsistemas que compõe o sistema chaveado, e então, verificar a existência de uma FLF para o sistema combinado. Dessa forma, a estabilização é verificada pela existência de uma única FLF, independente do número de subsistemas que compõe o sistema chaveado. Como nem sempre é possível encontrar uma única FLF, então, neste trabalho é proposta uma condição para a estabilização de sistemas fuzzy TS chaveados usando funções de Lyapunov fuzzy múltiplas. O resultado é obtido empregando desigualdades de Lyapunov-Metzler.

As desigualdades de Lyapunov-Metzler foram usadas inicialmente em Geromel and Colaneri (2006) para a estabilização de sistemas lineares chaveados e, posteriormente, foram estendidas para o projeto de realimentação de estados (Deaecto et al., 2010) e para o projeto de realimentação dinâmica da saída (Deaecto et al., 2011). Como os trabalhos citados anteriormente tratam exclusivamente de sistemas chaveados cujos subsistemas são lineares, então, neste trabalho é proposta uma extensão das desigualdades

de Lyapunov-Metzler para o projeto de controladores PDC usando funções de Lyapunov fuzzy. Um exemplo numérico ilustra a eficiência do método proposto.

Ao longo do texto, a notação $\mathbf{M} \succ \mathbf{0}$ ($\mathbf{M} \succeq \mathbf{0}$) é usada para representar matrizes definidas (semi-definidas) positivas. De modo equivalente a notação $\mathbf{M} \prec \mathbf{0}$ ($\mathbf{M} \preceq \mathbf{0}$) representa matrizes definidas (semi-definidas) negativas. O símbolo \mathbf{I}_n representa a matriz identidade de ordem n .

2 Formulação do Problema

Este trabalho propõe condições suficientes para o projeto de controladores fuzzy PDC para sistemas chaveados. O procedimento consiste em projetar controladores lineares para cada um dos modelos locais e então gerar o controlador global a partir da combinação fuzzy dos controladores locais. Desta forma, um modelo fuzzy TS realimentado pode ser representado por (Faria et al., 2013a):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^{r_\sigma} \sum_{i=1}^{r_\sigma} h_{\sigma(t)k}(\mathbf{x}(t)) h_{\sigma(t)i}(\mathbf{x}(t)) \left(\mathbf{A}_{\sigma(t)k} + \mathbf{B}_{\sigma(t)k} \mathbf{K}_{\sigma(t)i} \right) \mathbf{x}(t), \quad (1)$$

sendo $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $\sigma(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}$ uma função constante por partes denominada lei de chaveamento, $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, N\}$, sendo N o número de subsistemas do sistema chaveado, $\mathbf{A}_{\sigma(t)k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B}_{\sigma(t)k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ as matrizes dos modelos locais, $\mathbf{K}_{\sigma(t)k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ os ganhos locais da realimentação de estados, r_σ o número de modelos locais do subsistema $\sigma(t)$ e $h_{\sigma(t)k}(\mathbf{x}(t))$ as funções de pertinência de cada um dos modelos locais. As funções de pertinência satisfazem as seguintes propriedades:

$$\forall k \in \mathcal{R}_\sigma, h_{\sigma(t)k}(\mathbf{x}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{r_\sigma} h_{\sigma(t)k}(\mathbf{x}(t)) = 1 \quad (2)$$

sendo \mathcal{R}_σ o conjunto de números inteiros dados por $\{1, 2, \dots, r_\sigma\}$. O objetivo deste trabalho é encontrar condições suficientes para a existência de uma lei de chaveamento $\sigma(t)$ e de ganhos $\mathbf{K}_{\sigma(t)k}$, tal que o que sistema (1) seja assintoticamente estável. Para facilitar a notação, de agora em diante vamos substituir $\sigma(t)$ por p para indicar que no instante t o sistema chaveado (1) está ativo no subsistema p e denotar $h_{\sigma(t)k}(\mathbf{x}(t))$ por h_{pk} .

De (2) obtém-se a seguinte propriedade:

$$\sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} = 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (3)$$

Para o desenvolvimento do resultado principal será usado uma classe de matrizes de Metzler denotada por \mathcal{M} e composta por todas as matrizes $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tais que

$$\pi_{jp} \geq 0 \quad \forall j \neq p, \quad \sum_{j=1}^N \pi_{jp} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (4)$$

Observação 1 Segue de (4) que a classe de matrizes $\Pi \in \mathcal{M}$ usadas neste texto possuem elementos não positivos na diagonal principal, isto é, $\pi_{pp} \leq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}$.

3 Projeto de controladores PDC usando funções de Lyapunov fuzzy múltiplas

Conforme já mencionado, as matrizes de Metzler (4) foram usadas inicialmente em Geromel and Colaneri (2006) para assegurar a estabilidade assintótica de sistemas chaveados. O resultado principal é exibido a seguir.

Teorema 1 *Seja Π uma matriz conhecida satisfazendo (4). Se existirem matrizes $\mathbf{P}_p = \mathbf{P}'_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs*

$$\mathbf{P}_p \succ \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad (5)$$

$$\mathbf{A}'_p \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_p \mathbf{A}_p + \sum_{j=1}^N \pi_{jp} \mathbf{P}_j \prec \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P}. \quad (6)$$

Então, a lei de chaveamento

$$\sigma(t) = \arg \min_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{x}(t)' \mathbf{P}_p \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

faz com que a origem do sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t) \quad (8)$$

seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Prova: Ver Geromel and Colaneri (2006). \square

O Teorema 1 foi usado para garantir a estabilidade assintótica de sistemas chaveados cujos subsistemas são lineares. Além disso, a lei de chaveamento (7) é construída a partir de funções de Lyapunov quadráticas por partes.

O Teorema 1 foi estendido para o projeto de controladores em Deaecto et al. (2010) e Deaecto et al. (2011). Porém, novamente os resultados são voltados apenas para estabilização de sistemas chaveados que possuem subsistemas lineares e não podem ser aplicados diretamente em sistemas chaveados fuzzy TS. Considerando esse fato, a seguir são propostas condições suficientes para a estabilização do sistema fuzzy (1).

Como a função quadrática usada na lei de chaveamento (7) é muito conservadora para o estudo de sistemas fuzzy TS, então durante o texto usamos a seguinte família de funções de Lyapunov fuzzy

$$V_p(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)' \mathbf{P}_p(h) \mathbf{x}(t) \quad (9)$$

sendo $\mathbf{P}_p(h) = \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{P}_{pk}, \quad \forall p \in \mathcal{P}$. Como foi verificado em Valentino et al. (2012) e Faria et al. (2013a), FLFs geram resultados menos conservadores do que os obtidos com funções de Lyapunov quadráticas. A derivada da função (9) é dada por

$$\dot{V}_p(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)' \dot{\mathbf{P}}_p(h) \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}(t)' \mathbf{P}_p(h) \dot{\mathbf{x}}(t), \quad (10)$$

sendo $\dot{\mathbf{P}}_p(h) = \sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk}, \quad \forall p \in \mathcal{P}$. Como a derivada de (9) depende das derivadas de primeira ordem das funções de

pertinência h_{pk} , $\forall p \in \mathcal{P}, k \in \mathcal{R}_p$, para obter condições em termos de LMIs definem-se os seguintes conjuntos:

$$D_{pk} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n : |\dot{h}_{pk}| \leq \phi_{pk} \right\}, \quad (11)$$

sendo ϕ_{pk} , $p \in \mathcal{P}, k \in \mathcal{R}_p$, números reais positivos conhecidos.

Neste trabalho, o Teorema 1 é estendido para assegurar a estabilização do sistema (1) usando as funções de Lyapunov fuzzy múltiplas (9). O resultado principal é exibido a seguir.

Teorema 2 *Sejam ϕ_{pk} números reais conhecidos satisfazendo (11). Dadas as constantes $\alpha_p, \beta_p \in \mathcal{R}_p, \alpha_p \neq \beta_p$, e $\mu > 0$, se existirem matrizes $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{Y}_{pk} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{X}_p = \mathbf{X}'_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{Q}_{pk} = \mathbf{Q}'_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, satisfazendo as LMIs*

$$\mathbf{Q}_{p\alpha_p} \succ \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad (12)$$

$$\mathbf{Q}_{p\alpha_p} \preceq \mathbf{Q}_{pk}, \quad p \in \mathcal{P} \text{ e } k \in \mathcal{R}_p, \quad (13)$$

$$\mathbf{Q}_{p\beta_p} \succeq \mathbf{Q}_{pk}, \quad p \in \mathcal{P} \text{ e } k \in \mathcal{R}_p, \quad (14)$$

$$\mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p \succeq \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} \text{ e } k \in \mathcal{R}_p, \quad (15)$$

$$\Lambda_{pk_pi} + \Lambda_{pi_pk} + 2\tilde{\Lambda}_p \prec \mathbf{0}, \quad i \leq k, \quad (16)$$

$$p \in \mathcal{P} \text{ e } i, k \in \mathcal{R}_p,$$

sendo

$$\tilde{\Lambda}_p = \sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \pi_{pp} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{p\alpha_p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^N \pi_{jp} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{j\beta_j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{pk_pi} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda'_{21} \\ \lambda_{21} & -\mu(\mathbf{W} + \mathbf{W}') \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{11} = \mathbf{A}_{pk} \mathbf{W} + \mathbf{W}' \mathbf{A}'_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pi} + \mathbf{Y}'_{pi} \mathbf{B}'_{pk},$$

$$\lambda_{21} = \mathbf{Q}_{pk} - \mathbf{W}' + \mu(\mathbf{A}_{pk} \mathbf{W} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pi}).$$

Então, a lei de chaveamento

$$\sigma(t) = \arg \min_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{x}(t)' \mathbf{P}_p(h) \mathbf{x}(t) \quad (17)$$

faz com que a origem do sistema fuzzy TS (1), com ganhos locais

$$\mathbf{K}_{pk} = \mathbf{Y}_{pk} \mathbf{W}^{-1}, \quad (18)$$

seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Prova: A demonstração consiste em verificar que as LMIs (12)-(16) são equivalentes às condições do Teorema 1 para o sistema (1) com a função escalar (9). Para tanto, observe que multiplicando (16) por $h_{pk}h_{pi}$ e manipulando os termos, chega-se em

$$\sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_p} h_{pk}h_{pi} \Lambda_{pk_pi} + \tilde{\Lambda}_p \prec \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P}. \quad (19)$$

Multiplicando (19) a esquerda e a direita por $\begin{bmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix}'$ e sua transposta, respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma'_{21} \\ \gamma_{21} & -\mu(\mathbf{W}^{-1} + (\mathbf{W}')^{-1}) \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad (20)$$

sendo

$$\gamma_{11} = (\mathbf{W}')^{-1} \left(\mathbf{A}_p(h) + \mathbf{B}_{pK}(h) \right) + \mathbf{P}_{p\pi} + \left(\mathbf{A}_p(h) + \mathbf{B}_{pK}(h) \right)' \mathbf{W}^{-1} + \mathbf{P}_{p\phi},$$

$$\gamma_{21} = \mathbf{P}_p(h) - \mathbf{W}^{-1} + \mu(\mathbf{W}')^{-1} \left(\mathbf{A}_p(h) + \mathbf{B}_{pK}(h) \right),$$

$$\mathbf{A}_p(h) = \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{A}_{pk}, \quad (21a)$$

$$\mathbf{B}_{pK}(h) = \left(\sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_p} h_{pk}h_{pi} \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pi} \right) \mathbf{W}^{-1}, \quad (21b)$$

$$\mathbf{P}_p(h) = (\mathbf{W}')^{-1} \left(\sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{Q}_{pk} \right) \mathbf{W}^{-1}, \quad (21c)$$

$$\mathbf{P}_{p\pi} = (\mathbf{W}')^{-1} \left(\pi_{pp} \mathbf{Q}_{p\alpha_p} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^N \pi_{jp} \mathbf{Q}_{j\beta_j} \right) \mathbf{W}^{-1}, \quad (21d)$$

$$\mathbf{P}_{p\phi} = (\mathbf{W}')^{-1} \left(\sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} (\mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p) \right) \mathbf{W}^{-1}. \quad (21e)$$

Agora, multiplicando (20) a esquerda e a direita pela matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \left(\mathbf{A}_p(h) + \mathbf{B}_{pK}(h) \right)' \\ & \end{bmatrix}$ e sua transposta, respectivamente, chega-se em

$$\mathbf{P}_{p\phi} + \left(\mathbf{A}_p(h) + \mathbf{B}_{pK}(h) \right)' \mathbf{P}_p(h) + \mathbf{P}_p(h) \left(\mathbf{A}_p(h) + \mathbf{B}_{pK}(h) \right) + \mathbf{P}_{p\pi} \prec \mathbf{0}. \quad (22)$$

De (3) e (11) tem-se que $\sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} \leq \mathbf{P}_{p\phi}$. Logo, segue de (22) que

$$\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} + \left(\mathbf{A}_p(h) + \mathbf{B}_{pK}(h) \right)' \mathbf{P}_p(h) + \mathbf{P}_p(h) \left(\mathbf{A}_p(h) + \mathbf{B}_{pK}(h) \right) + \mathbf{P}_{p\pi} \prec \mathbf{0}. \quad (23)$$

De (13) e (14) segue que

$$\mathbf{P}_{p\alpha_p} \preceq \mathbf{P}_p(h) \preceq \mathbf{P}_{p\beta_p}, \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (24)$$

E, por construção, sabe-se que $\pi_{pp} \leq 0$ e $\pi_{jp} \geq 0 \quad \forall j \neq p$. De onde conclui-se que

$$\mathbf{P}_{p\pi} = \pi_{pp} \mathbf{P}_{p\alpha_p} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^N \pi_{jp} \mathbf{P}_{j\beta_j} \geq \pi_{pp} \mathbf{P}_p(h) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^N \pi_{jp} \mathbf{P}_j(h) = \sum_{j=1}^N \pi_{jp} \mathbf{P}_j(h). \quad (25)$$

Finalmente, substituindo (25) em (23) obtém-se

$$\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} + \left(\mathbf{A}_p(h) + \mathbf{B}_{pK}(h) \right)' \mathbf{P}_p(h) + \mathbf{P}_p(h) \left(\mathbf{A}_p(h) + \mathbf{B}_{pK}(h) \right) + \sum_{j=1}^N \pi_{jp} \mathbf{P}_j(h) \prec \mathbf{0} \quad (26)$$

que é equivalente à condição (6) para o sistema (1) com a função auxiliar (9). Por outro lado, decorre de (12) e (13) que $\mathbf{P}_p(h) \succ \mathbf{0}$, $\forall p \in \mathcal{P}$. O que equivale à condição (5). Portanto, quando as LMIs (12)-(16) são factíveis, a função (9) satisfaz as condições do Teorema 1 ao longo das soluções do sistema (1). Então, pelo Teorema 1, a lei de chaveamento (17) torna a origem do sistema fuzzy TS (1), com ganhos locais (18), um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. \square

A eficiência do método proposto é ilustrada através da solução de um exemplo.

4 Exemplo

Considere um sistema fuzzy TS (1), representado pelos seguintes modelos locais:

Subsistema 1:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 10.00 & -10.00 \\ 6.20 & 1.00 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (27a)$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 10.00 & -3.60 \\ 6.20 & -21.00 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Subsistema 2:

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -3.60 & 1.00 \\ 3.00 & 20.73 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (27b)$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} -10.00 & 1.00 \\ 3.00 & 0.17 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

e FPs

$$h_{11} = \frac{1 + \sin(x_1(t))}{2}, \quad h_{12} = 1 - h_{11}, \quad (28)$$

$$h_{21} = \frac{1}{1 + e^{x_1(t)}}, \quad h_{22} = 1 - h_{21}.$$

Para a solução numérica das LMIs (12)-(16) foram usados os pacotes “YALMIP” (Löfberg, 2004) e “SeDuMi” (Sturm, 1999) do MATLAB, também foram usados os parâmetros $\mu = 0.1$, $\phi_{pk} = 5.5$, $\forall p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathcal{R}_p$, $\Pi = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.6 \\ 0.4 & -0.4 \end{bmatrix}$, $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Com estes parâmetros, as matrizes encontradas pelo Teorema 2 foram:

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} 825.7161 & -279.5958 \\ -279.5958 & 97.8728 \end{bmatrix}, \quad (29a)$$

$$\mathbf{P}_{12} = 10^3 \begin{bmatrix} 1.4809 & -0.4975 \\ -0.4975 & 0.1705 \end{bmatrix}, \quad (29b)$$

$$\mathbf{P}_{21} = \begin{bmatrix} 857.6875 & -287.5998 \\ -287.5998 & 99.5586 \end{bmatrix}, \quad (29c)$$

$$\mathbf{P}_{22} = 10^3 \begin{bmatrix} 1.5271 & -0.5151 \\ -0.5151 & 0.1772 \end{bmatrix}, \quad (29d)$$

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} 296.5752 & -111.9109 \end{bmatrix}, \quad (30a)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 510.7811 & -155.6600 \end{bmatrix}, \quad (30b)$$

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} 277.3955 & -117.9041 \end{bmatrix}, \quad (30c)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 496.5733 & -175.0569 \end{bmatrix}. \quad (30d)$$

Logo, pelo Teorema 2, a origem do sistema (1) com modelos locais (27), funções de pertinência (28), ganhos locais (30) e lei de chaveamento (17), é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Para a condição inicial $x_0 = [0.5 \ 4.5]'$, as Figuras 1, 2 e 3 exibem a resposta dinâmica do sistema controlado, a lei de chaveamento (17) e a função escalar (9), respectivamente.

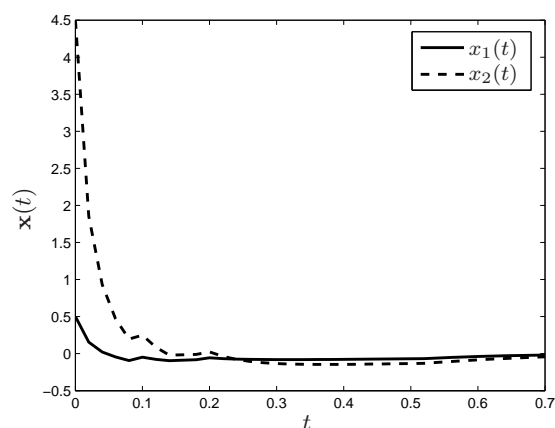


Figura 1: Resposta dinâmica do sistema (1) com modelos locais (27), funções de pertinência (28) e ganhos locais (30), para a condição inicial $x_0 = [0.5 \ 4.5]'$.

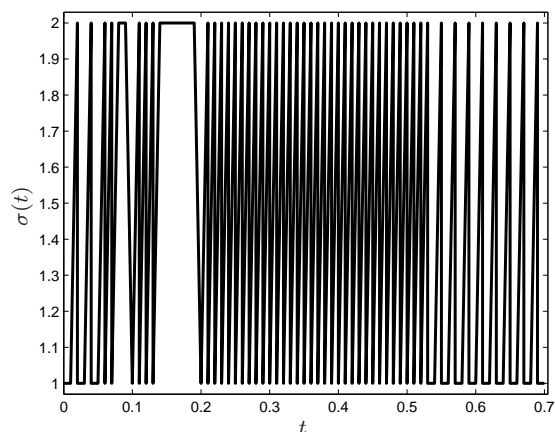


Figura 2: Lei de chaveamento (17), com matrizes (29) e funções de pertinência (28).

Pela Figura 3, nota-se que a função (9), gerada com as matrizes (29) e funções de pertinência (28), é positiva e estritamente decrescente, ou seja, $V_p(\mathbf{x}(t))$ é uma função de Lyapunov para o sistema (1). De fato, foi provado em Geromel and Colaneri (2006) que toda função (9), gerada a partir da lei de chaveamento (17), satisfaz as condições do método direto de Lyapunov: $V_p(\mathbf{x}(t)) > 0$ e $\dot{V}_p(\mathbf{x}(t)) < 0$, $\forall \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$.

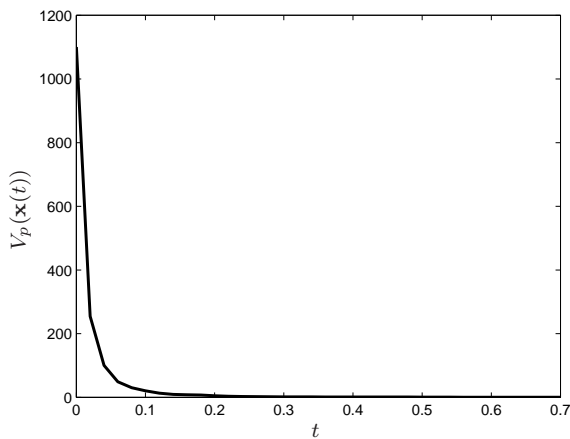


Figura 3: Função de Lyapunov múltipla (9), com matrizes (29) e funções de pertinência (28).

Nos métodos apresentados em Faria et al. (2013a) e Faria et al. (2013b) é necessário fornecer parâmetros $\tilde{\alpha}_p$, $p \in \mathcal{P}$, satisfazendo condições de convexidade. Por outro lado, o Teorema 2 exige o conhecimento prévio de uma matriz Π satisfazendo (4). Em ambos os casos, não existe um método sistemático para a obtenção dos parâmetros de projeto. Como o Teorema 2 e os métodos apresentados em Faria et al. (2013a) e Faria et al. (2013b) dependem de parâmetros de projeto, então via simulações numéricas não foi possível estabelecer uma relação de eficiência entre eles. O que se verificou é que para alguns exemplos é mais fácil encontrar uma matriz Π para o Teorema 2 que parâmetros $\tilde{\alpha}_p$, $p \in \mathcal{P}$, para Faria et al. (2013b). Dessa forma, o resultado proposto neste trabalho pode ser visto como uma alternativa para os casos em que não é possível encontrar parâmetros $\tilde{\alpha}_p$, $p \in \mathcal{P}$ que garantam a estabilização do sistema (1) com o método apresentado em Faria et al. (2013b).

5 Conclusões

Neste trabalho foram propostas condições para a estabilização de sistemas fuzzy TS chaveados usando controladores PDC. Explorando propriedades das desigualdades de Lyapunov Metzler foi possível obter condições baseadas em LMIs usando funções de Lyapunov fuzzy múltiplas. As funções de Lyapunov encontradas foram usadas para gerar uma lei de chaveamento estabilizante para o sistema chaveado. Um exemplo numérico foi usado para ilustrar a eficiência do método proposto.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

Chiou, J., Wang, C., Cheng, C. and Wang, C. (2010). Analysis and synthesis of switched nonlinear systems using the T-S fuzzy model, *Applied Mathematical Modelling* **34**(6): 1467–1481.

- Colaneri, P., Geromel, J. C. and Astolfi, A. (2008). Stabilization of continuous-time switched nonlinear systems, *Systems & Control Letters* **57**(1): 95–103.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C. and Daafouz, J. (2010). Controle \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares com comutação, *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, Bonito, pp. 468–473.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C. and Daafouz, J. (2011). Dynamic output feedback \mathcal{H}_∞ control of switched linear systems, *Automatica* **47**(8): 1713–1720.
- Faria, F. A., Valentino, M. C. and Oliveira, V. A. (2013a). Condições relaxadas para a estabilização de sistemas fuzzy TS chaveados usando controladores PDC, *Anais do XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Fortaleza, CE. Artigo 8172.
- Faria, F. A., Valentino, M. C. and Oliveira, V. A. (2013b). Stabilizing switched T-S fuzzy systems using a fuzzy Lyapunov function approach, *Proceedings of the 12th European Control Conference*, Zurique, Suíça, pp. 4305–4310.
- Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **45**(5): 1915–1930.
- Jabri, D., Guelton, K., Manamanni, N., Jaadari, A. and Chinh, C. D. (2012). Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law, *Journal of Control Engineering and Applied Informatics* **14**(2): 40–49.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- Ojleska, V. M., Kolemishvska-Gugulovska, T. and Dimirovski, G. M. (2011). Superior performance of switched fuzzy control systems: An overview and simulation experiments, *International Journal of Simulation Systems, Science & Technology* **12**(2): 19–29.
- Shuliang, L., Yang, H. and Zhang, L. (2009). Slack stability analysis of a class of switched fuzzy systems, *Proceedings of 2009 IEEE Chinese Control and Decision Conference*, Shanghai, pp. 6100–6104.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11-12**: 625–653. <http://citeseer.ist.psu.edu/sturm99using.html>.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **15**(1): 116–132.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach*, John Wiley and Sons.

- Valentino, M. C., Faria, F. A. and Oliveira, V. A. (2012). Análise de estabilidade de sistemas fuzzy TS chaveados usando uma função de Lyapunov fuzzy, *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, PB, pp. 3394–3399.
- Yang, H., Dimirovski, G. M. and Zhao, J. (2008). A state feedback \mathcal{H}_∞ control design for switched fuzzy systems, *Proceedings of 4th International IEEE Conference on Intelligent Systems*, Varna, Bulgaria, pp. 4–7.