UMA EXTENSÃO DO PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA PARA SISTEMAS PERIÓDICOS

Wendhel Raffa Coimbra*, Luís Fernando Alberto Costa†, Fabíolo Moraes Amaral‡

*Av. Pedro Pedrossian, 725
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
79500-000 Paranaíba, MS, Brasil

†Av. Trabalhador São Carlense, 400
Universidade de São Paulo
13566-590 São Carlos, SP, Brasil

‡Rua A1, 398
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Bahia
45820-000 Eunápolis, BA, Brasil

Emails: wendhel.raffa@ufms.br, lfcalberto@usp.br, fabiolo@ifba.edu.br

UMA EXTENSÃO DO PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA PARA SISTEMAS PERIÓDICOS

Abstract— In this paper, we present an extension of the invariance principle for the class of nonlinear dynamical systems described by a set of periodic ordinary differential equations. This extension allows the derivative of the auxiliary function V, along system trajectories, usually called Lyapunov function, to be positive in some bounded sets. This important feature simplify the problem of exhibiting a Lyapunov-like function and allows the application of the principle to systems that could not be treated by the conventional principle due to the non existence of a Lyapunov function or to the difficulty of exhibition one. The extension of the invariance principle is useful to obtain estimates of attractors and regions of attraction of periodic nonlinear systems.

Keywords— Dynamic Systems, Differential Equations, Principle of Invariance, Periodic Systems.

Resumo— Neste trabalho, apresentamos uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos não lineares descrita por um conjunto de equações diferenciais ordinárias periódicas. Esta extensão permite que a derivada da função auxiliar V, ao longo das trajetórias do sistema, normalmente chamada função de Lyapunov, seja positiva em alguns conjuntos limitados. Esta característica importante simplifica o problema de exibir uma função do tipo Lyapunov e permite a aplicação do princípio em sistemas que não podem ser tratados com o princípio convencional, devido à não existência de uma função de Lyapunov ou de uma dificuldade em exibí-la. A extensão do princípio de invariância é útil para obter estimativas de atratores e regiões de atração de sistemas periódicos não lineares.

Palavras-chave— Sistemas Dinâmicos, Equações Diferenciais, Princípio de Invariância, Sistemas Periódicos.

1 Introdução

O Princípio de Invariância de LaSalle é uma das ferramentas mais importantes para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais. LaSalle (1960a; 1960b) demonstrou este resultado para equações diferenciais autônomas definidas em espaços de dimensão finita. Posteriormente, este resultado foi estendido para diversas outras classes de equações, incluindo: equações de diferença (LaSalle, 1977), equações diferenciais definidas em espaços de dimensão infinita (Hale, 1969), (Slemrod, 1970), equações diferenciais funcionais (Hale, 1993) e equações com descontinuidade no campo vetorial (sistemas chaveados) (Bacciotti, 2005), (Goebel, 2008), (Hespanha, 2004), (Mancilla, 2006) e (Shevitz, 1994). O Princípio de Invariância também foi demonstrado para equações diferenciais não autônomas, incluindo as periódicas (LaSalle, 1962), quase-periódicas (Miller, 1965), não autônomas retardadas (Rodrigues, 1970) e equações diferenciais ordinárias mais gerais (Sell, 1967).

O Princípio de Invariância de LaSalle estuda o comportamento assintótico das soluções de um sistema sem a necessidade de conhecer explicitamente as soluções das equações diferenciais. Para isto, uma função escalar auxiliar, muitas vezes denominada função de Lyapunov, é utilizada. O principal problema do princípio de invariância é a não existência de um método específico para encontrar a função escalar auxiliar ou função de Lyapunov. Uma das condições mais restritivas na busca por esta função é que a derivada da mesma deve ser semi-definida negativa ao longo das trajetórias do sistema. Em vários sistemas, tais como os sistemas caóticos, com um grau de complexibilidade em suas trajetórias, é muito difícil exibir uma função escalar satisfazendo as condições do princípio de invariância e em particular satisfazendo a condição da derivada ser semi-definida negativa ao longo das trajetórias, mesmo quando sua existência pode ser comprovada.

Uma versão mais geral do princípio de invariância, denominada extensão do princípio de invariância, simplifica em parte este problema, permitindo que a derivada da função escalar assuma valores positivos em algumas regiões limitadas do espaço. Esta extensão foi provada para o caso contínuo em (Rodrigues et al., 2000), para o caso discreto em (Alberto et al., 2007), para uma classe de equações diferenciais com retardo limitado em (Rabelo, 2010) e para uma classe de sistemas chaveados em (Valentino et al., 2012).

A extensão do princípio de invariância de LaSalle não exige que a derivada da função de Lyapunov seja sempre semi-definida negativa. Assim, diversos problemas que não poderiam ser tratados por esta teoria, devido a dificuldade ou impossibilidade de se exibir uma função de Lyapunov, passam a ser resolvidos pela extensão do princípio de invariância.

A extensão do princípio de invariância, além da sua própria importância na teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares, foi aplicada com sucesso em problemas de análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência por Bretas (2003), Silva et al. (2005), Bretas et al. (2005) e em problemas de sincronização Rodrigues et al. (2000) e Mijolaro et al. (2010).

Neste trabalho, uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos chamados sistemas periódicos é desenvolvida. Esta extensão é útil para estimar atratores e regiões de atração.

2 Preliminares

Considere o sistema dinâmico não autônomo não linear

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1. A solução $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de (1) passando em x_o no tempo $t = t_o$ é denotada por $s(t, t_o, x_o)$ e satisfaz as seguintes propriedades: $s(t_0, t_0, x_0) = x_0$ e $s(t, t_1, s(t_1, t_0, x_0)) = s(t, t_0, x_0)$, $\forall t, t_1, t_0 \in \mathbb{R}$ e $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.1 *O sistema (1) é periódico com período $T \in \mathbb{R}$ se $f(t + T, x) = f(t, x), \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Em um sistema periódico em que T é o período, as soluções satisfazem a seguinte propriedade:

$$s(t + T, t_0 + T, x_0) = s(t, t_0, x_0), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall x_0. \tag{2}$$

De fato, supondo que a função $x(t) = s(t, t_0, x_0)$ seja solução de (1), mostraremos que $x(t - T) = s(t - T, t_0, x_0)$, que é uma translação da solução no tempo, também é solução (1).

Como $x(t)$ é solução da equação diferencial (1), então $\dfrac{d}{dt} s(t, t_0, x_0) = f(t, s(t, t_0, x_0))$.

Considere a mudança de variável: $t = \tau - T \Rightarrow dt = d\tau$. Na nova variável, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} s(\tau - T, t_0, x_0) &= f(\tau - T, s(\tau - T, t_0, x_0)) \\ &\overset{period.}{=} f(\tau, s(\tau - T, t_0, x_0)). \end{aligned}$$

Provamos portanto que $x(t-T)$ é uma solução de (1) e em particular é a solução que satisfaz $x(t_0 + T) = x_0$. Pela unicidade da solução, temos que $s(t - T, t_0, x_0) = s(t, t_0 + T, x_0)$.

Fazendo $t = u + T \Rightarrow u = t - T$, podemos concluir a partir da igualdade anterior que $s(u, t_0, x_0) = s(u+T, t_0+T, x_0)$. Para esse mesmo período T, pode-se mostrar por indução que

$$s(t, t_0, x_0) = s(t + kT, t_0 + kT, x_0), \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Se o sistema (1) é autônomo, isto é, se f não depende explicitamente de t, então podemos pensar neste sistema como um sistema periódico com um período arbitrário. Portanto, todos os resultados apresentados abaixo para os sistemas periódicos aplicam-se igualmente bem aos sistemas autônomos.

Definição 2.2 *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$. Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é chamado um **ponto ω-limite** da trajetória $s(t, t_0, x_0)$ se existe uma sequência $\{t_i\}$ de números em $[t_0, +\infty)$ tal que $t_i \to +\infty$ e*

$$\lim_{i \to \infty} \|p - s(t_i, t_0, x_0)\| = 0.$$

*O conjunto dos pontos $\omega-$limites de $s(\cdot, t_0, x_0)$ é chamado de **conjunto ω-limite** de $s(\cdot, t_0, x_0)$ e é denotado por $\omega(t_0, x_0)$.*

Definição 2.3 *Um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de **conjunto invariante** com relação à equação diferencial (1) se, para cada $x_0 \in M$, existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $s(t, t_0, x_0) \in M, \forall t \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.4 *Um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de **conjunto positivamente invariante** com relação à equação diferencial (1) se, para cada $x_0 \in M$, existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $s(t, t_0, x_0) \in M, \forall t \geq t_o$.*

Os Lemas (2.1), (2.2) e (2.3) discutem propriedades de conjuntos $\omega-$limite.

Lema 2.1 *(Vidyasagar, 1993) O conjunto ω-limite $\omega(t_o, x_o)$ da solução $s(t, t_o, x_o)$ do sistema (1) é um conjunto fechado.*

A propriedade de ser fechado é verdadeira para todos os conjuntos limites. Quando a solução é limitada, ganham-se algumas propriedades importantes.

Lema 2.2 *(Vidyasagar, 1993) Suponha que a solução $s(\cdot, t_0, x_0)$ de (1) seja limitada para $t \geq t_o$. Então, o conjunto $\omega(t_0, x_0)$ é não vazio, limitado, conexo e $d(s(t, t_0, x_0), \omega(t_0, x_0)) \to 0$ quando $t \to +\infty$.*

Em geral, conjuntos limites de sistemas não autônomos não são invariantes. No caso particular de sistemas periódicos e autônomos, os conjuntos limites de soluções limitadas são também invariantes.

Lema 2.3 *(Vidyasagar) Suponha que o sistema (1) seja periódico. Então $\omega(t_0, x_0)$ é um conjunto invariante.*

Demonstração.
Queremos mostrar que o conjunto ω-limite é invariante, logo, dado $p \in \omega(t_0, x_0)$, precisamos mostrar que existe um tempo inicial $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $s(t, \tau, p) \in \omega(t_0, x_0), \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Dado $p \in \omega(t_0, x_0)$, temos que existe uma sequência $\{t_i\}, t_i \to \infty$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} ||p - s(t_i, t_0, x_0)|| = 0$ quando $t_i \to \infty$.

Seja T o período de (1) de modo que valha (3). Para cada i, encontra-se um inteiro k_i tal que $t_i - k_i T \in [0, T)$. Então a sequência $\{\tau_i\} = \{t_i - k_i T\}$ é limitada, e portanto admite uma subsequência convergente. Escolha tal subsequência $\{\tau_i^{'}\} = \{t_i^{'} - k_i^{'} T\}$ e enumere mais uma vez como $\{\tau_i\}$. Seja $\tau \in [0, T]$ seu limite.

Vamos mostrar que $s(t + k_i T, t_o, x_o) \to s(t, \tau, p)$ quando $i \to \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e que portanto $\omega(t_o, x_o)$ é um conjunto invariante.

Das propriedades de fluxo, tem-se as seguintes igualdades:
$s(t + k_i T, t_o, x_o) = s(t + k_i T, t_i, s(t_i, t_o, x_o)) = s(t + k_i T, \tau_i + k_i T, s(t_i, t_o, x_o)) = s(t, \tau_i, s(t_i, t_o, x_o))$.

Da continuidade das soluções com relação às condições iniciais temos que $s(t, \tau_i, s(t_i, t_o, x_o)) \to s(t, \tau, p)$ quando $i \to \infty$.

Portanto $s(t, \tau, p) \in \omega(t_0, x_0)$. □

3 Funções Escalares e Conjuntos de Nível Invariantes

Dado uma função escalar $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, definiremos dois conjuntos de nível:

$$S(L) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } V(t, x) \leq L\}$$

e

$$A(L) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(t, x) < L,\ \forall t \geq 0\}.$$

Sob certas condições sobre a derivada da função escalar V, podemos mostrar que os conjuntos de nível $S(L)$ e $A(L)$ possuem algumas propriedades de invariância.

Lema 3.1 *Considere o sistema (1) e seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Se $\dot{V} \leq 0$, então $S(L)$ é um conjunto positivamente invariante.*

Demonstração. Dado $x_0 \in S(L)$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $V(t_0, x_0) < L$. Mostraremos que $s(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \geq t_0$.

Como V é decrescente e $s(\cdot, t_0, x_0)$ é uma função contínua, então para todo tempo $\tau \geq t_0$ temos que $V(\tau, s(\tau, t_0, x_0)) \leq V(t_0, s(t_0, t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) < L$.

Assim, para todo $\tau \geq t_0, s(\tau, t_0, x_0) \in S(L)$, o que prova que o conjunto $S(L)$ é positivamente invariante. □

Lema 3.2 *Considere o sistema (1) e seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $\dot{V} \leq 0$. Suponha que $x_0 \in A(L)$, então a solução $s(t, t_0, x_0) \in S(L)$, $\forall t \geq t_0, \forall t_0$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in A(L)$. Como $A(L) \subset S(L)$, então $x_0 \in S(L)$. Do Lema 3.1 sabemos que $S(L)$ é positivamente invariante e portanto $s(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \geq t_0, \forall t_0$. Portanto, segue-se a tese. □

Os Lemas 3.1 e 3.2 estudam a invariância de $S(L)$ e $A(L)$ quando $\dot{V} \leq 0$. Quando a derivada de V não é semi-definida negativa, podemos ainda obter propriedades similares de invariância impondo algum controle sobre a região onde a derivada de V fica positiva. Os Lemas 3.3 e 3.4 a seguir estudam estas propriedades.

Lema 3.3 *Considere o sistema (1) e seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 periódica com período T. Seja $C \supseteq \{x \in S(L) : \exists t \geq 0, \dot{V}(t, x) > 0\}$ e admita que $\sup_{(t,x)\in[0,T]\times C} V(t, x) = l < L$, então $S(L)$ é um conjunto positivamente invariante.*

Demonstração. Seja $x_0 \in S(L)$. Vamos dividir a prova em duas partes. Suponha primeiramente que $s(t, t_0, x_0) \notin C, \forall t \geq t_0$. Então $\dot{V}(t, s(t, t_0, x_0)) \leq 0$, $\forall t \geq t_0$, ou seja, V é decrescente e então $V(t, s(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < L$, $\forall t \geq t_0$. Assim, $s(t, t_0, x_0) \in S(L)$ para todo $t \geq t_0$.

Agora, suponha que exista um tempo $t_1 \geq t_0$ tal que $s(t_1, t_0, x_0) \in C$ e suponha por contradição que exista um tempo $t_2 > t_1$ tal que $s(t_2, t_0, x_0) \notin S(L)$. Então $V(t_2, s(t_2, t_0, x_0)) > L$ e, da continuidade da função V e da solução s, existe um tempo t^* tal que $V(t^*, s(t^*, t_0, x_0)) = L$. Sabemos também que $C \subset S(L)$ e que o máximo da função V no conjunto C é $l < L$. Portanto, existe um tempo $\tilde{t}$ tal que $V(\tilde{t}, s(\tilde{t}, t_0, x_0)) = l$ e $s(t, t_0, x_0) \in S(L) - C$ para todo $t \in (\tilde{t}, t^*)$. Como l<L, então deve existir um tempo $\hat{t} \in (\tilde{t}, t^*)$ tal que

$\dot{V}(\hat{t}) > 0$. Mas isto contradiz o fato de que $\dot{V} \leq 0$ fora do conjunto C e portanto a hipótese de que a solução sai do conjunto $S(L)$ é falsa. Portanto $S(L)$ é um conjunto positivamente invariante. $\square$

Lema 3.4 *Considere o sistema (1) e seja* $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função de classe* C^1 *periódica com período* T. *Seja* $C \supseteq \{x \in S(L) : \exists t \geq 0, \dot{V}(t,x) > 0\}$ *e admita que* $\sup_{(t,x)\in[0,T]\times C} V(t,x) = l < L$. *Suponha que* $x_0 \in A(L)$, *então a solução* $s(t,t_0,x_0) \in S(L)$, $\forall t \geq t_0, \forall t_0$.

Demonstração. Seja $x_0 \in A(L)$. Como $A(L) \subset S(L)$, então $x_0 \in S(L)$. Sabemos que, pelo Lema 3.3, $S(L)$ é positivamente invariante e portanto $s(t,t_0,x_0) \in S(L), \forall t \geq t_0, \forall t_0$. Portanto, segue-se a tese. $\square$

4 Extensão do Princípio de Invariância

4.1 Princípio de Invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos

Nesta seção, uma versão do princípio de invariância de LaSalle (1960) para a classe de sistemas periódicos é apresentada.

Teorema 4.1 ***(Princípio de Invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos)*** *Suponha que o sistema (1) seja periódico, com período* T, *e* $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *seja uma função de classe* C^1 *tal que* V *seja periódica e com o mesmo período do sistema (1). Seja* $L \in \mathbb{R}$ *uma constante real, e considere os conjuntos* $S(L)$ *e* $A(L)$. *Suponha que* $S(L)$ *seja limitado e* $\dot{V}(t,x) \leq 0, \forall t \in [0,T), \forall x \in S(L)$. *Defina* $E := \{x \in S(L) : \exists t \geq 0$ *tal que* $\dot{V}(t,x) = 0\}$. *Seja* B *o maior conjunto invariante contido em* E. *Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- $x_0 \in A(L) \Rightarrow s(t,t_0,x_0) \to B$ *quando* $t \to +\infty$ *para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$;
- $x_0 \in S(L) \Rightarrow \exists t_0$ *tal que* $s(t,t_0,x_0) \to B$ *quando* $t \to +\infty$.

Demonstração. Seja $x_0 \in A(L)$. Pelo Lema 3.2, sabemos que $s(t,t_0,x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0,\omega_p)$, onde ω_p é o tempo maximal de existência da solução s.

Como $S(L)$ é limitado, $\omega_p = +\infty$ e a solução $s(t,t_0,x_0)$ existe e é limitada para todo $t \geq t_0$. Pelo Lema 2.2, podemos afirmar que $\omega(t_0,x_0)$ é não vazio e $d(s(t,t_0,x_0),\omega(t_0,x_0)) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

Por outro lado, $\dot{V}(t,s(t,t_0,x_0)) \leq 0 \ \forall t \geq t_0$, $V(t,s(t,t_0,x_0))$ é decrescente e por V ser contínua e periódica em t e, pelo fato de $S(L)$ ser limitado, temos que V é limitada, e em particular, inferiormente limitada para $t \geq t_0$. Então, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $V(t) \to \alpha$ quando $t \to +\infty$.

Seja $p \in \omega(t_0,x_0)$. Então existe uma sequência $\{t_i\}$,com $t_i \to \infty$, tal que $s(t_i,t_0,x_0) \to p$. Logo, $V(t_i,s(t_i,t_0,x_0)) \to \alpha$ quando $i \to \infty$. Para cada i, encontra-se um inteiro k_i tal que $t_i + k_i T \in [0,T)$. Então a sequência $\{\tau_i\} = \{t_i - k_i T\}$ é limitada, e portanto admite uma subsequência convergente. Escolha tal subsequência $\{\tau_i'\} = \{t_i' - k_i' T\}$ e enumere mais uma vez como $\{\tau_i\}$. Seja $\tau \in [0,T)$ seu limite.

$V(t_i', s(t_i',t_0,x_0)) = V(\tau_i' + k_i' T, s(t_i',t_0,x_0)) \overset{\text{period. de V}}{=} V(\tau_i', s(t_i',t_0,x_0))$, onde $t_i' = \tau_i' + k_i' T$. Conclui-se portanto que $\alpha = \lim_{i\to\infty} V(t_i', s(t_i',t_0,x_0)) = \lim_{i\to\infty} V(\tau_i', s(t_i',t_0,x_0)) \overset{\text{cont. de V}}{=} V(\tau,p)$.

Vamos mostrar que $V(u,s(u,\tau,p)) = \alpha, \forall u \in \mathbb{R}$. De fato, da demonstração do Lema 2.3, temos que $s(u + k_i T, t_0, x_0) \to s(u,\tau,p)$ quando $i \to \infty$. Logo, $\alpha = \lim_{i\to\infty} V(u + k_i T, s(u + k_i T, t_0, x_0)) = \lim_{i\to\infty} V(u, s(u + k_i T, t_0, x_0)) = V(u, s(u,\tau,p))$. Pela invariância de $\omega(t_0,x_0)$ temos que $s(t,\tau,p) \in \omega(t_0,x_0), \forall t$. Logo $V(t,s(t,\tau,p)) = \alpha, \forall t \Rightarrow \dot{V}(\tau,p) = 0$. Portanto, para cada $p \in \omega(t_0,x_0)$ existe tempo τ tal que $\dot{V}(\tau,p) = 0$.

Portanto, podemos afirmar que $p \in E$, logo $\omega(t_0,x_0) \subseteq E$, e por $\omega(t_0,x_0)$ ser um conjunto invariante segue que $\omega(t_0,x_0) \subseteq B$. Portanto, $s(t,t_0,x_0) \to \omega(t_0,x_0) \subset B$ quando $t \to +\infty$.

Para provar a segunda afirmação, considere $x_0 \in S(L)$. Pelo Lema 3.1, temos que existe t_0 tal que $s(t,t_0,x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0,\omega_p)$, onde ω_p é o tempo maximal de existência da solução s.

Como $S(L)$ é limitado, $\omega_p = +\infty$ e a solução $s(t,t_0,x_0)$ existe e é limitada para todo $t \geq t_0$. De maneira análoga ao caso em que $x_0 \in A(L)$, prova-se que $\exists t_0$ tal que $s(t,t_0,x_0) \to B$ quando $t \to +\infty$.

$\square$

A Figura 1 ilustra o Teorema 4.1.

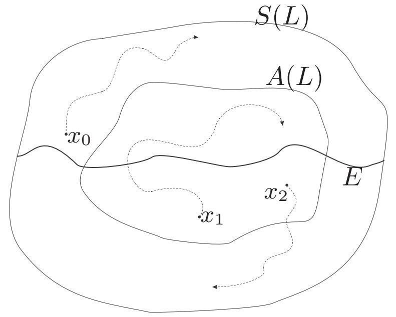

Figura 1: Interpretação geométrica do princípio de invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos. Para as condições iniciais x_1 e x_2 em $A(L)$, temos que as soluções não saem de $S(L)$ e, para condição inicial x_0 em $S(L)$, a solução não sai de $S(L)$.

Exemplo 4.1 *Considere o sistema não linear e periódico descrito pela equação diferencial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - (2 + \sin(t))x \end{cases}$$

Solução. A origem é um ponto de equilíbrio do sistema. Seja V dada por $V(t,x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{2+\sin(t)}$. Note que V é periódica com o mesmo período do sistema. A derivada de V ao longo das soluções é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x,y) &= -\tfrac{4+2\sin(t)+\cos(t)}{(2+\sin(t))^2}y^2 \\ &\leq 0, \forall t \geq 0, \forall x, y. \end{aligned}$$

Temos que V é localmente positiva definida e que a derivada é semi-definida negativa, satisfazendo as condições do Teorema 4.1. A função V é radialmente ilimitada e portanto os conjuntos $S(L)$ e $A(L)$ são limitados para qualquer $L > 0$. Portanto, todas as condições do teorema 4.1 estão satisfeitas e todas as soluções deste sistema tendem, para o maior conjunto invariante B contido em $E := \{(x,y) \in S(L) : y = 0\}$. Explorando o campo vetorial, observa-se que $\dot{y} = 0$ apenas na origem, logo, a origem é o único conjunto invariante contido em E. Consequentemente todas as soluções tendem para a origem quando $t \to +\infty$, ou seja, a origem é um ponto de equilíbrio globalmente atrativo. ◇

Exemplo 4.2 *Considere o sistema não linear e periódico descrito pela equação diferencial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y(2 + \sin(t)) \\ \dot{y} = -x(2 + \sin(t)) - y \end{cases}$$

Solução. A origem é um ponto de equilíbrio do sistema. Seja V a função de Lyapunov dada por $V(t,x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2+\sin(t)}$. Note que V é periódica com o mesmo período do sistema. A derivada de V ao longo das soluções é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x,y) &= \tfrac{-2(x^2+y^2)(2+\sin t)-(x^2+y^2)\cos t}{(2+\sin t)^2} \\ &= -\tfrac{(4+2\sin t+\cos t)}{(2+\sin t)^2} \cdot (x^2+y^2) \\ &\leq 0, \forall t \geq 0, \forall x, y. \end{aligned}$$

Como $V(t,x,y) \leq x^2+y^2$ e $V(t,x,y) \geq \frac{x^2+y^2}{3}$ então V é localmente definida positiva e a derivada de V é semi-definida negativa, satisfazendo as condições do Teorema 4.1. A função V é radialmente ilimitada e portanto os conjuntos $S(L)$ e $A(L)$ são limitados para qualquer $L > 0$. Portanto, todas as condições do Teorema 4.1 estão satisfeitas e todas as soluções deste sistema tendem, para o maior conjunto invariante B contido em $E := \{(x,y) \in S(L) : \exists t \geq 0; (x,y) = (0,0)\}$. Consequentemente todas as soluções tendem para a origem quando $t \to +\infty$, ou seja, a origem é um ponto de equilíbrio globalmente atrativo. ◇

4.2 Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos

Nesta seção, uma extensão do princípio de invariância é demonstrada. A principal característica desta extensão é a possibilidade da derivada da função escalar auxiliar V assumir valores positivos em algumas regiões limitadas do espaço de estados. Esta característica simplifica, de certo modo, a busca pela função V e permite que problemas que não podiam ser tratados com o princípio de invariância, seja pela não existência de uma função escalar V ou pela dificuldade em exibí-la, passem a ser possíveis de serem tratados com este resultado.

Teorema 4.2 ***(Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos)***
Suponha que o sistema (1) seja periódico e $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seja uma função de classe C^1 tal que V seja periódica e com o mesmo periodo do sistema (1). Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante real, e considere os conjuntos $S(L)$ e $A(L)$ e suponha que $S(L)$ seja limitado. Seja $C \supseteq \{x \in S(L) : \exists t \geq 0, \dot{V}(t,x) > 0\}$ e admita que $\sup_{(t,x)\in[0,T]\times C} V(t,x) = l < L$. Defina $S(l) := \{x \in S(L) : \exists t \geq 0, V(t,x) \leq l\}$, $A(l) := \{x \in A(L) : V(t,x) < l, \forall t \geq 0\}$ e $E := \{x \in S(L) : \exists t \geq 0 \text{ tal que } \dot{V}(t,x) = 0\} \cup S(l)$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E. Então,

- *$x_0 \in A(L) \Rightarrow d(s(t,t_0,x_0),B) \to 0$ quando $t \to \infty$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$;*
- *$x_0 \in S(L) \Rightarrow \exists t_0$ tal que $d(s(t,t_0,x_0),B) \to 0$ quando $t \to \infty$;*
- *$x_0 \in A(l) \Rightarrow s(t,t_0,x_0)$ tende para o maior conjunto invariante contido em $S(l)$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$;*
- *$x_0 \in S(l) \Rightarrow \exists t_0$ tal que $s(t,t_0,x_0)$ tende para o maior conjunto invariante contido em $S(l)$.*

Demonstração.
Sejam $s(t,t_0,x_0)$ a solução da equação diferencial com condição inicial (t_0,x_0) e $t_+ > t = 0$ o máximo tempo de existência da solução s.

Seja $x_0 \in A(l)$. Então $V(t,x_0) < l, \forall t \geq 0$. Mostraremos que $s(t,t_0,x_0) \in S(l), \forall t \in [t_0,t_+)$. De fato, suponha por contradição que $\exists t^* > t_0$ tal que $s(t^*,t_0,x_0) \notin S(l)$, o que implica em

$V(t^*, s(t^*, t_0, x_0) > l$. Então existe $t_1 \in [t_0, t^*)$ tal que $V(t_1, s(t_1, t_0, x_0)) = l$ e $V(t, s(t, t_0, x_0)) > l$ para $t \in (t_1, t^*)$. Assim, $\exists \tilde{t} \in (t_1, t^*)$ tal que $\dot{V}(\tilde{t}, x) > 0$. Sabemos que $s(t, t_0, x_0) \notin A(l)$, $\forall t \in (t_1, t^*)$ e, além disso $C \subset A(l)$, o que nos leva a uma contradição, pois $\dot{V} \leq 0$ neste intervalo.

Como $s(t, t_0, x_0) \in S(l) \subset S(L), \forall t \geq t_0$ e $S(L)$ é limitado, então $S(l)$ é limitado $\forall t \geq t_0$, implicando em $t_+ = +\infty$. Logo a solução pertence a $S(l)$, para $t \geq t_0$.

Portanto, pelo Lema 2.2, o conjunto ω-limite $\omega(t_0, x_0)$ é não vazio e a solução se aproxima dele quando $t \to +\infty$. Por outro lado, o conjunto $\omega(t_0, x_0)$ é um conjunto invariante e $\omega(t_0, x_0) \subset S(l)$, então concluímos que a solução se aproxima do maior conjunto invariante contido em $S(l)$ quando $t \to +\infty$. Isto prova a terceira afirmação do teorema. A quarta afirmação pode ser provada de maneira análoga e portanto sua demonstração será omitida.

Considere $x_0 \in A(L) - A(l)$. Do Lema 3.4, temos que a solução $s(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, t_+)$.

Assim, pelos fatos de $s(t, t_0, x_0) \in S(L)$ $\forall t \geq t_0$ e $S(L)$ ser um conjunto limitado, conclui-se que $t_+ = +\infty$ e a solução pertence a $S(L)$ para $t \geq t_0$.

Portanto, pelo Lema 2.2 temos que $\omega(t_0, x_0) \neq \varnothing$ e a solução tende para ele quando $t \to +\infty$.

Suponha que $s(t, t_0, x_0) \notin C, \forall t \geq t_0$. Então $\dot{V}(t, s(t, t_0, x_0)) \leq 0$, $\forall t \geq t_0$, ou seja V é decrescente e então $V(t, s(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < L$. Por hipótese temos que V é contínua e periódica em t e, por $S(L)$ ser limitado, então V é limitada, em particular, inferiormente limitada para $t \geq t_0$, o que implica em $V \to \alpha \in \mathbb{R}$ quando $t \to \infty$.

Seja $p \in \omega(t_0, x_0)$. Então existe uma sequência $\{t_i\}, t_i \to \infty$ tal que $s(t_i, t_0, x_0) \to p$. Para cada i, encontra-se $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que $t_i + k_i T \in [0, T)$. Então a sequência $\{\tau_i\} = \{t_i - k_i T\}$ é limitada, e portanto admite uma subsequência convergente. Escolha tal subsequência $\{\tau_i^{'}\} = \{t_i^{'} - k_i^{'} T\}$ e enumere mais uma vez como $\{\tau_i\}$. Seja $\tau \in [0, T)$ seu limite.

$V(t_i^{'}, s(t_i^{'}, t_0, x_0)) = V(\tau_i^{'} + k_i^{'} T, s(t_i^{'}, t_0, x_0)) \overset{\text{period. de V}}{=} V(\tau_i^{'}, s(t_i^{'}, t_0, x_0))$, onde $t_i^{'} = \tau_i^{'} + k_i^{'} T$. Conclui-se portanto que $\alpha = \lim_{i \to \infty} V(t_i^{'}, s(t_i^{'}, t_0, x_0)) = \lim_{i \to \infty} V(\tau_i^{'}, s(t_i^{'}, t_0, x_0)) \overset{\text{cont. de V}}{=} V(\tau, p)$.

Vamos mostrar que $V(u, s(u, \tau, p)) = \alpha, \forall u \in \mathbb{R}$. De fato, da demonstração do Lema 2.3, temos que $s(u + k_i T, t_0, x_0) \to s(u, \tau, p)$ quando $i \to \infty$. Logo, $\alpha = \lim_{i \to \infty} V(u + k_i T, s(u + k_i T, t_0, x_0)) = \lim_{i \to \infty} V(u, s(u + k_i T, t_0, x_0)) = V(u, s(u, \tau, p))$. Pela invariância de $\omega(t_0, x_0)$ temos que $s(t, \tau, p) \in \omega(t_0, x_0), \forall t$. Logo $V(t, s(t, \tau, p)) = \alpha, \forall t \Rightarrow \dot{V}(\tau, p) = 0$. Portanto, para cada $p \in \omega(t_0, x_0)$ existe tempo τ tal que $\dot{V}(\tau, p) = 0$.

Portanto, podemos dizer que $p \in E$, logo $\omega(t_0, x_0) \subseteq E$, e por $\omega(t_0, x_0)$ ser um conjunto invariante, segue que $\omega(t_0, x_0) \subseteq B$. Portanto, $s(t, t_0, x_0) \to \omega(t_0, x_0) \subseteq B$ quando $t \to \infty$.

Por fim, suponha que $s(t, t_0, x_0) \in C$ para algum $t \geq 0$. Então $x_0 \in A(l)$, e para este caso já provamos acima que $d(s(t, t_0, x_0), B) \to 0$ quando $t \to \infty$. Portanto, provamos a primeira afirmação do teorema.

Para provar a segunda afirmação, considere $x_0 \in S(L)$. Pelo Lema 3.3, temos que existe t_0 tal que $s(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, \omega_p)$, onde ω_p é o tempo maximal de existência da solução s.

Como $S(L)$ é limitado, $\omega_p = +\infty$ e a solução $s(t, t_0, x_0)$ existe e é limitada para todo $t \geq t_0$. De maneira análoga ao caso em que $x_0 \in A(L) - A(l)$, prova-se a segunda afirmação do teorema. $\square$

A Figura 2 ilustra o Teorema 4.2.

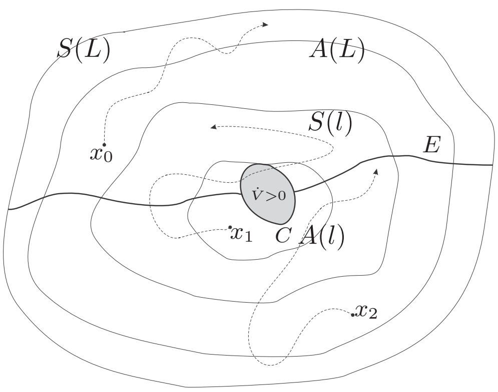

Figura 2: Interpretação geométrica da extensão do princípio de invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos.

O exemplo a seguir ilustra os resultados do Teorema 4.2.

Exemplo 4.3 *Considere o sistema não linear e periódico descrito pela equação diferencial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x^2 + y^2 - 1) + y(2 + \sin(t)) \\ \dot{y} = -x(2 + \sin(t)) - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

Solução. Seja V a função de Lyapunov dada por $V(t, x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2 + \sin(t)}$. Note que V é periódica com o mesmo período do sistema. Calculando a derivada de V obtemos a seguinte expressão:

$$\dot{V}(t, x, y) = -\frac{(x^2 + y^2)}{(2 + \sin t)^2} \cdot M(t, x, y),$$

onde $M(t, x, y) = [(x^2 + y^2 - 1)(4 + 2\sin(t)) + \cos(t)]$.

O sinal de M define a região onde a derivada de V é positiva. Desta forma, podemos definir o conjunto C da seguinta maneira: $C := \{(x, y) \in S(L) : x^2 + y^2 < \frac{7}{6}\}$.

Como $V = \dfrac{x^2+y^2}{2+\sin(t)} \leq x^2+y^2$ então $\sup_{(t,x)\in[0,T]\times C} V \leq \sup_{(t,x)\in[0,T]\times C}(x^2+y^2)$ e daí $l = \sup_{(t,x)\in[0,T]\times C} V = \frac{7}{6} < L$.

Sendo assim, temos $S(l) := \{(x,y) \in S(L) : x^2+y^2 \leq \frac{7}{6}\}$, $A(l) := \{(x,y) \in A(L) : x^2+y^2 < \frac{7}{6}, \forall t \geq 0\}$ e $E := \{(x,y) \in S(L) : (x,y) = (0,0)\} \cup S(l) = \{(x,y) \in S(L) : x^2+y^2 \leq \frac{7}{6}\}$.

Portanto, pelo Teorema 4.2 podemos concluir que a solução tende para o maior conjunto invariante contido em $S(l)$ e $S(l)$ é uma estimativa do atrator global. A Figura 3 ilustra este atrator. $\diamond$

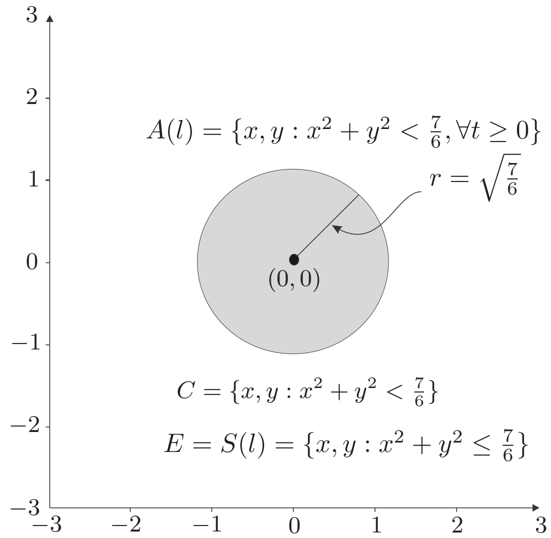

Figura 3: Representação geométrica do Exemplo 4.3.

No exemplo a seguir, aplicamos a extensão do Princípio de Invariância para sistemas periódicos para obter uma estimativa do atrator do sistema de Duffing forçado.

Exemplo 4.4 *Considere o sistema dinâmico não linear e periódico descrito por*

$$M\ddot{z} + K_c\dot{z} + K_m z + k_m\rho^2 z^3 = k_u\cos(\omega t);$$

fazendo $x = z$ *e* $y = \dot{z}$, *e escolhendo* $k_m/M = 3, k_c/M = 3, k_m\rho^2/M = 0.1, k_u/M = 2$ *e* $\omega = 1$, *temos a seguinte equação diferencial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -3y - 3x - 0.1x^3 + 2\cos(t) \end{cases}$$

Solução. Seja V a função de Lyapunov dada por $V(t,x,y) = (9.2804x^2 + 2.5368xy + 1.0069y^2)$. Note que V é periódica com o mesmo período do sistema.

Desta forma, temos que $\dot{V} = [4.909xy + (5.0736x + 4.0276y)\cos(t) - (7.6104x^2 + 3.5046y^2 + 0.20138x^3y + 0.25368x^4)]$

Assim, definimos o conjunto $C := \{(x,y) \in S(L) : [4.909xy + (5.0736|x| + 4.0276|y|) - (7.6104x^2 + 3.5046y^2 + 0.20138x^3y + 0.25368x^4)] > 0\}$.

Usando o Software Mathematica, temos que valor o máximo da função V em C é aproximadamente 23.7297 em $(x,y) \approx (1.27462, 1.73666)$.

Logo, $\overline{A(l)} = S(l) := \{x,y \in \mathbb{R}^n : 9.2804x^2 + 2.5368xy + 1.0069y^2 \leq 23.7297\}$ e $E := \{(x,y) \in S(L) : \exists t \geq 0; \dot{V} = 0\} \cup S(l) = S(l)$. Portanto, usando o Teorema 4.2, temos que a solução tende para o maior conjunto invariante contido em $S(l)$ e $S(l)$ é uma estimativa do atrator global.

$\diamond$

De maneira ilustrativa, a Figura 4 representa o Exemplo 4.4.

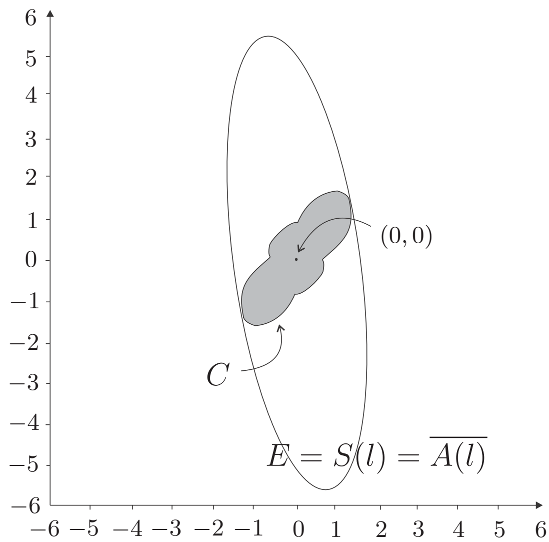

Figura 4: Representação geométrica do Exemplo 4.4.

5 Conclusões

Neste trabalho, uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas periódicos foi demonstrada. A principal característica desta extensão é a possibilidade da derivada da função escalar auxiliar, muitas vezes chamada de função de Lyapunov, assumir valores positivos em alguns conjuntos limitados. Relaxando a condição da derivada ser semi-definida negativa no princípio de invariância, simplifica de certa forma, a busca pela função auxiliar. Como consequência, uma classe maior de sistemas dinâmicos periódicos podem ser tratados com esta teoria. A extensão do princípio de invariância foi útil para obtermos estimativas de atratores de sistemas dinâmicos periódicos e com comportamento complexo, como é o caso do oscilador forçado de Duffing, que exibe comportamento caótico.

Agradecimentos

Agradecemos a todos amigos do laboratório LACO/USP/EESC que ajudaram na parte computacional e ao CNPq.

Referências

Alberto, L. F. C., Calliero, T. R., Martins, A. C. P. and Bretas, N. G. (2007). An Invariance Principle for Nonlinear Discrete Autonomous Dynamical Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, v. 52, p. 692-697.

Bacciotti, A; Mazzi, L. (2005). An invariance principle for nonlinear switched systems, Systems and Control Letters, 54 (11) 1109-1119.

Bretas, N. G., London JR, J. B. A., Alberto, L. F. C. and Bretas, A. S. (2005). A topological approach to the identification of critical measurements in power-system state estimation, IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Fundamental Theory and Applications, USA, v. 52, n.1, p. 139-147.

Bretas, Newton Geraldo; Alberto, L. F. C. (2003). Lyapunov Function for Power System with Transfer Conductances: Extension of the Invariance Principle, IEEE Transactions on Power Systems, USA, v. 18, n.2, p. 769-777.

Hale, J. K. (1969). Dynamical systems and stability, J. Math. Anal. and Appl, 26: 39-59.

Hale, J. K; Lunel, S. V. (1993). Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, Vol 99.

Hespanha, J. P. (2004). Uniform stability of switched linear systems: Extensions of LaSalle´s invariance principle, IEEE Transactions on Automatic Control, 49 (4) 470-482.

LaSalle, J. P. (1962). Asymptotic stability criteria, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Hydrodynamic Instability, AMS 13: 299-307.

LaSalle, J. P. (1977). Stability theory for difference equations. studies in ordinary differencial equation, Studies in ordinary differencial equations, Stud. in Math., Math. Assoc. of America, Washington, D. C. (Reviewer G.R.Sell) 14: 1-31.

Mijolaro, A. P., Alberto, L. F. C. and Bretas, N. G. (2010). Synchronization of a Class of Second-Order Nonlinear Systems, International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, v. 18, p. 3461-3471.

Miller, R. K. (1965). Assymptotic behavior os solutions of nonlinear differential equations, Transactions of the American Mathematical Society, 115(3): 400-416.

Rabelo, Marcos ; Alberto, L. F. C. (2010). An Extension of the Invariance Principle for a Class of Differential Equations with Finite Delay, Advances in Difference Equations, v. 2010, p. 1-14.

Rodrigues, H. M. (1970). Invarian´ca para sistemas não autônomos de equações diferenciais com retardamento e aplicações, Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

Rodrigues, H. M., Alberto, L. F. C. and Bretas, N. G. (2000). On the Invariance Principle. Generalizations and Applications to Synchronism, IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Fundamental Theory and Applications, U.S.A., v. 47, n.5, p. 730-739.

Sell, G. (1967). Nonautonomous differential equations and topological dynamics, i, ii, Trans. Amer. Math. Soc. 127: (I)241-262 (II)263-283.

Shevitz, D; Paden, B. (1994). Lyapunov stability theory of nonsmooth systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 39 (9) 1910-1914.

Silva, F. H. J. R. d., Alberto, L. F. C., London JR, J. B. A. and Bretas, N. G. (2005). Smooth perturbation on a classical energy function for lossy power system stability analysis, IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Fundamental Theory and Applications, USA, v. 52, n.1, p. 222-229.

Slemrod, M. (1970). Asymptotic behavior of a class of abstract dynamical systems, J. Diff. Equations, 7(3): 584-600.

Valentino, M. C., Oliveira, V. A., Alberto, L. F. C. and Azevedo, D. S. (2012). An extension of the invariance principle for dwell-time switched nonlinear systems, IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Fundamental Theory and Applications, USA, v. 52, n.1, p. 222-229.

Vidyasagar, M. (1993). Nonlinear Systems Analysis, PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey - Second Edition.