

RELAÇÕES ESTÁTICAS DE MODELOS NARX MISO E SUA REPRESENTAÇÃO DE HAMMERSTEIN

ANTÔNIO H. RIBEIRO*, LUIS A. AGUIRRE†

*Departamento de Engenharia Eletrônica, UFMG. Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG

Emails: antonio-ribeiro@ufmg.com.br, aguirre@cpdee.ufmg.br

Resumo— Este trabalho apresenta condições para as quais a função estática de um modelo *Multi-Input Single-Output* (MISO) *Non-linear AutoRegressive with eXogenous inputs* (NARX) polinomial possa ser escrita na forma racional ou polinomial. Uma situação particularmente útil ocorre quando a função estática é caracterizada por um conjunto de funções polinomiais. A existência e unicidade desse conjunto depende de condições apresentadas em três lemas. Baseado nesses lemas, um procedimento de três etapas para a obtenção do modelo de Hammerstein MISO é proposto. O procedimento é ilustrado identificando um modelo de Hammerstein usando dados de uma plataforma de petróleo

Abstract— This paper presents the conditions under which the static function of a *Multi-Input Single-Output* (MISO) *Non-linear AutoRegressive with eXogenous inputs* (NARX) polynomial model can be written in rational or polynomial form. A particularly useful situation is when the static function is characterized by a set of polynomial functions. The existence and uniqueness of this set is shown to depend on conditions which are given in three lemmas. Based on these lemmas, a three step procedure for MISO Hammerstein model identification is presented. The procedure is illustrated identifying a Hammerstein model using data from an oil platform.

Keywords— MISO Hammerstein model, NARX model, Nonlinear System Identification

1 Introdução

Muitos sistemas não lineares podem ser representados por modelos de Hammerstein (Eskinat et al., 1991; Hunter and Korenberg, 1986), que são modelos constituídos por dois blocos: um não linear estático em cascata com um linear dinâmico e invariante no tempo (LIT). No caso discreto o bloco LIT é representado por um modelo ARX (*AutoRegressive with eXogenous inputs*) e a função f é a parte não linear estática (Fig. 1).

Trabalhos pioneiros sobre a identificação de modelos de Hammerstein apresentam métodos paramétricos. Um algoritmo iterativo conhecido como algoritmo NG foi proposto em (Narendra and Gallman, 1966). Um algoritmo não-iterativo é apresentado em (Chang and Luus, 1971). Esses dois algoritmos clássicos têm algo em comum: a estimativa dos parâmetros da parte estática é dependente da estimativa dos parâmetros da parte dinâmica. Em outros algoritmos a parte estática e a parte linear do modelo de Hammerstein são desacopladas, isso é, o cálculo da relação estática e da relação dinâmica é feito em etapas distintas (Bai, 2004; Billings and Fakhouri, 1978). O método aqui proposto adota essa segunda premissa.

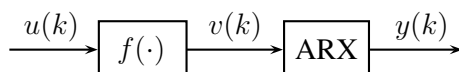


Figura 1: Modelo de Hammerstein.

Algum esforço tem sido feito para encontrar representações de Hammerstein que sejam adequadas ao caso multivariável. Em (Kortmann and

Unbehauen, 1987) são apresentados dois procedimentos para a identificação de modelos de Hammerstein MISO (*multi-input single-output*). O primeiro é uma extensão direta do trabalho apresentado em (Chang and Luus, 1971). O segundo método se baseia na predição recursiva de erros. Os algoritmos apresentados em (Kortmann and Unbehauen, 1987) utilizam a transformação do modelo de Hammerstein MISO em uma representação equivalente. Isso é evitado em outros métodos recursivos (Boutayeb and Darouach, 1995).

O interesse no modelo de Hammerstein ressurgiu recentemente. Estudos têm sido feitos sobre modelos de Hammerstein monovariável, como para o caso de sistemas com não linearidade abrupta (Bai, 2002), ou para medidas contaminadas com ruído (Ding and Chen, 2005). Outros estudos aproximam a não linearidade do modelo de Hammerstein por redes neurais (Janczak, 2003) ou por *splines* cúbicos (Dempsey and Westwick, 2004).

O uso de modelos de Hammerstein em esquemas de controle não linear (como estudado em (Fruzzetti et al., 1997)) tem se popularizado e parece ser o responsável pelo ressurgimento do interesse nessa classe de modelos. Nessas aplicações o modelo de Hammerstein é preferível a outras representações, o que justifica o esforço de obter um modelo de Hammerstein a partir de outro modelo estimado, como em (Aguirre et al., 2005). O presente artigo tem por objetivo estabelecer algumas condições a serem atendidas por modelos não lineares ARX (NARX) multivariáveis a fim de poder obter a não linearidade estática a partir desses modelos. Como subproduto desse resultado apresenta-se um procedimento para a identificação

de modelos Hammerstein MISO.

Após esta introdução, a Seção 2 apresenta os fundamentos conceituais do trabalho e na Seção 3 são desenvolvidas as relações matemáticas entre as representações NARX e de Hammerstein. As principais ideias do artigo são ilustradas na Seção 4. A Seção 5 encerra o trabalho com conclusões.

2 Fundamentos Conceituais

2.1 Modelos de Hammerstein Multivariáveis

Na literatura existem diferentes propostas de modelos Hammerstein MISO. A classificação que será explicada a seguir foi proposta por (Harnischmacher and Marquardt, 2007).

Uma das primeiras generalizações multivariáveis do modelo de Hammerstein, ilustrada na Figura 2, foi proposta por (Kortmann and Unbehauen, 1987).

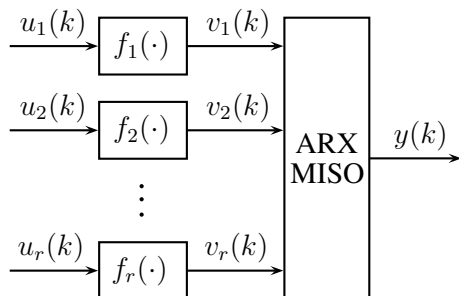


Figura 2: representação de Kortmann e Unbehauen (KU)

Nessa representação de Kortmann e Unbehauen (KU) há r entradas. Cada qual relacionada com uma, e apenas uma, variável intermediária a partir de funções estáticas f_i , $i = 1, 2, \dots, r$. Essas variáveis intermediárias (v_i) são entradas para o estágio dinâmico linear MISO.

Outra representação do modelo de Hammerstein foi proposta por Rollins e colaboradores (RO) em (Rollins et al., 2003) e está mostrada na Figura 3. Nesta representação a parte dinâmica é monovariável e a parte estática é multivariável. A representação de um processo dinâmico multivariável por um elemento dinâmico monovariável é uma limitação ao modelo proposto por Rollins.

Em (Harnischmacher and Marquardt, 2007) explica-se esta limitação do modelo de Rollins como a falta de capacidade de modelar sistemas que dependem da direção do vetor de entradas (sistemas com direcionalidade de entrada). Para processos com estas características a representação de KU e as outras representações apresentadas a seguir são mais adequadas.

Uma representação mais geral foi introduzida em (Eskinat et al., 1991) por Eskinat, Johnson e Luyben (EJL) e é ilustrada na Figura 4, em

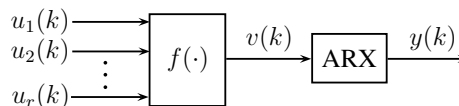


Figura 3: representação de Rollins e colaboradores (RO)

que f_i , $i = 1, 2, \dots, m$ são funções estáticas racionais que relacionam as variáveis de entrada, u_i , $i = 1, 2, \dots, r$, com as variáveis intermediárias, v_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

Originalmente na representação de EJJ proposta em (Eskinat et al., 1991) o número de variáveis de entrada, r , e o número de funções estáticas, m , deveriam ser iguais. Em (Lakshminarayanan et al., 1995), a estrutura foi generalizada para casos em que m independe de r .

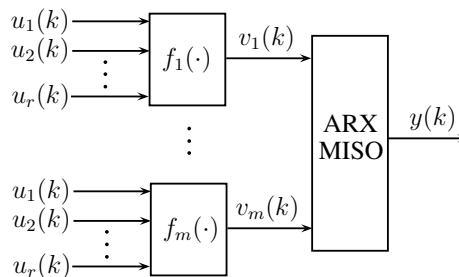


Figura 4: representação de Eskinat, Johnson e Luyben (EJL)

Em (Harnischmacher and Marquardt, 2007) foi introduzida uma outra forma de representação (representação de HM). Esta forma de representação é uma quarta possibilidade de generalização do caso monovariável.

Assim como os modelos de KU e de EJJ, esta representação é adequada a sistemas com direcionalidade de entrada e, assim como o modelo de KU, apresenta independência entre os canais estáticos do modelo

Porém enquanto o modelo de KU restringe as funções estáticas para que esta separação de canais aconteça, o modelo de HM não.

As representações de KU e de RO são casos particulares da representação de EJJ. O método proposto neste artigo, apesar de aplicável à representação de EJJ, mostra-se especialmente adequado à obtenção de uma representação de KU.

Como veremos a seguir, o método aqui proposto só é unívoco, isso é, dado um modelo NARX existe um conjunto único de funções estáticas, para a representação de KU. Por isso a identificação de modelos KU é o foco deste artigo.

2.2 Modelos de Hammerstein SISO

O modelo de Hammerstein *single-input single-output* (SISO) pode ser interpretado como um

caso particular de um modelo NARX SISO, que, considerando u e y como os sinais de entrada e de saída, pode ser escrito como:

$$y(k) = F^l(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-d), \dots, u(k-n_u), e(k)),$$

em que n_y , n_u e d são, respectivamente, os maiores atrasos em y , em u e o tempo morto. O ruído é representado pela variável e . No modelo NARX polinomial, F^l é um polinômio de ordem l e pode ser descrito por (Leontaritis and Billings, 1985a):

$$y(k) = \sum_{q=0}^l \sum_{p=0}^{l-q} \sum_{n_1, \dots, n_q}^{n_y, n_u} c_{p,q-p}(n_1, \dots, n_q) \times \prod_{i=1}^p y(k-n_i) \prod_{i=1}^q u(k-n_i) + e(k), \quad (1)$$

em que l é o grau de não linearidade do modelo e

$$\sum_{n_1, n_q}^{n_y, n_u} = \sum_{n_1}^{n_y} \sum_{n_2}^{n_y} \dots \sum_{n_q}^{n_u}$$

A Eq. 1 indica uma soma de todos os termos com grau de linearidade de 1 até l . Cada termo de ordem $l = (p+q)$ contém, p fatores do tipo $y(k-n_i)$ e q fatores $u(k-n_i)$ e estão multiplicados por coeficientes do tipo $c_{p,q-p}(n_1, \dots, n_q)$. A parte de média móvel, que não está mostrada em (1), é utilizada na estimação dos parâmetros. A estrutura do modelo pode ser escolhida usando técnicas ortogonais: (Chen et al., 1989; Korenberg et al., 1988).

Em (Aguirre et al., 2005) foi apresentada uma técnica para estimar a função estática não linear do modelo de Hammerstein a partir do modelo NARX. Essa técnica consiste em, dado um modelo NARX polinomial, considerá-lo assintoticamente estável. Nesse caso, a análise em estado estacionário resulta em:

$$u(k) = u(k-1) = \dots = u(k-n_u) = \bar{u},$$

$$y(k) = y(k-1) = \dots = y(k-n_y) = \bar{y},$$

e substituindo na Equação 1 obtém-se:

$$\bar{y} = \sum_{q=0}^l \sum_{p=0}^{l-q} C_{p,q} \bar{y}^p \bar{u}^q, \quad (2)$$

para o qual:

$$C_{p,q} = \sum_{n_1, n_q}^{n_y, n_u} c_{p,q-p}(n_1, \dots, n_q) = \Sigma_{y^p u^q}.$$

Sendo que $\Sigma_{y^p u^q}$ é um coeficiente de agrupamento, formalmente definido em uma das definições apresentadas a seguir:

Definição 1 (Aguirre and Billings, 1995) *Um agrupamento de termos consiste em todos os termos de mesmo tipo. Representamos o conjunto de todos os termos $y^p(k-i)u^q(k-i)$ como um agrupamento $\Omega_{y^p u^q}$.*

Definição 2 (Aguirre and Billings, 1995) *O coeficiente de um agrupamento é a soma de todos os parâmetros dos termos de um mesmo agrupamento. O coeficiente correspondente ao agrupamento $\Omega_{y^p u^q}$ é representado por $\Sigma_{y^p u^q}$.*

É importante destacar que, para obter uma relação estática unívoca a partir do modelo NARX, os coeficientes de agrupamento devem ser tais que $\Sigma_{y^p u^q} = 0$, para $p > 1$. Neste caso a partir da equação (2) será possível isolar o \bar{y} como uma função de \bar{u} , obtendo $\bar{y} = f(\bar{u})$, em que f é uma função racional e unívoca.

Para obter uma função estática polinomial os coeficientes de agrupamento devem ser tais que $\Sigma_{y^p u^q} = 0$ para qualquer valor de $q \geq 1$.

Obtida a função estática que descreve o sistema, a identificação do modelo de Hammerstein é direta. O sinal intermediário $v(k) = f(u(k))$ pode ser obtido a partir do conhecimento da função estática f . De posse do sinal $v(k)$ e do sinal de saída $y(k)$, o modelo ARX SISO que relaciona os dois pode ser obtido, usando técnicas lineares. O objetivo deste trabalho é generalizar para o caso MISO o procedimento originalmente proposto em (Aguirre et al., 2005).

3 Modelos MISO: NARX polinomiais e de Hammerstein

3.1 Relação estática de modelos NARX polinomiais MISO

Considere um modelo NARX MISO polinomial, que descreva o sistema para o qual se deseja obter o modelo de Hammerstein. Esse modelo NARX MISO terá uma estrutura semelhante àquela mostrada em (1), só que agora haverá mais de uma entrada. A relação estática entre entrada e saída, descrita para o caso monovariável pela Equação 2, terá como análogo para o caso multivariável:

$$\bar{y} = \sum_i C_i \bar{y}^{p_i} \bar{u}_1^{q_{1,i}} \bar{u}_2^{q_{2,i}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,i}}, \quad (3)$$

o somatório inclui todos os possíveis monômios, tais que $p + q_1 + q_2 + \dots + q_r \leq l$. C_i é o coeficiente que multiplica o i -ésimo monômio, ou seja, o coeficiente de agrupamento (ver Definição 2) $C_i = \Sigma_{y^{p_i} u_1^{q_{1,i}} u_2^{q_{2,i}} \dots u_r^{q_{r,i}}}$.

Os próximos resultados relacionam os coeficientes de agrupamento com a relação estática.

Lema 1 *Se $\Sigma_{y^{p_i} u_1^{q_{1,i}} u_2^{q_{2,i}} \dots u_r^{q_{r,i}}} = 0$, $p > 1$, $\forall q_i, i = 1, 2, \dots, r$, a relação estática (3) será unívoca e po-*

derá ser escrita na forma $\bar{y} = f(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r)$.

Prova: Caso a condição não seja atendida, (3) será um polinômio de grau $p > 1$, que tipicamente não terá solução única.

Se a condição for satisfeita a relação estática (3) pode ser escrita como:

$$\bar{y} = \sum_j C_j \bar{y} \bar{u}_1^{q_{1,j}} \bar{u}_2^{q_{2,j}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,j}} + \sum_i C_i \bar{u}_1^{q_{1,i}} \bar{u}_2^{q_{2,i}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,i}},$$

sendo $C_i = \sum_{y u_1^{q_{1,i}} \dots u_r^{q_{r,i}}}$ e $C_j = \sum_{u_1^{q_{1,j}} \dots u_r^{q_{r,j}}}$. Isolando \bar{y} obtemos a seguinte relação unívoca:

$$\bar{y} = \frac{\sum_i C_i \bar{u}_1^{q_{1,i}} \bar{u}_2^{q_{2,i}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,i}}}{1 - \sum_j C_j \bar{u}_1^{q_{1,j}} \bar{u}_2^{q_{2,j}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,j}}}, \quad (4)$$

que está na forma desejada. \square

Observação 1 A maneira mais fácil de atender ao Lema 1 é não ter no modelo qualquer regressor pertencente aos agrupamentos $\Omega_{y^p u_1^{q_1} u_2^{q_2} \dots u_r^{q_r}}$, $p > 1$ e $\forall q_i, i = 1, 2, \dots, r$. Se houver tais regressores, ainda é possível atender ao Lema 1 utilizando estimadores com restrições, sendo as restrições a serem usadas definidas pelo próprio Lema 1.

Lema 2 A relação estática (3) será unívoca e polinomial se, além das restrições do Lema 1, se tiver: $\sum_{y u_1^{q_1} u_2^{q_2} \dots u_r^{q_r}} = 0$, $\forall q_i$, excetuado o caso trivial $q_i = 0$, $i = 1, \dots, r$.

Prova: Atendida a restrição do Lema 1 a relação estática será unívoca e poderá ser escrita como mostrado na Eq. 4. Seja:

$$\begin{aligned} \sum_j C_j \bar{u}_1^{q_{1,j}} \bar{u}_2^{q_{2,j}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,j}} &= \Sigma_y + \\ &+ \sum_{\substack{j \\ q_1 + \dots + q_r > 0}} C_j \bar{u}_1^{q_{1,j}} \bar{u}_2^{q_{2,j}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,j}}. \end{aligned}$$

Atendidas as restrições do Lema 2:

$$\sum_{\substack{j \\ q_1 + \dots + q_r > 0}} C_j \bar{u}_1^{q_{1,j}} \bar{u}_2^{q_{2,j}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,j}} = 0.$$

Logo a Eq. 4 pode ser reescrita como:

$$\bar{y} = \frac{\sum_i C_i \bar{u}_1^{q_{1,i}} \bar{u}_2^{q_{2,i}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,i}}}{1 - \Sigma_y} = \sum_i C'_i \bar{u}_1^{q_{1,i}} \bar{u}_2^{q_{2,i}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,i}}, \quad (5)$$

em que $C'_i = C_i / (1 - \Sigma_y)$. \square

Observação 2 O Lema 2 requer que os únicos regressores que tenham y sejam os pertencentes a Ω_y . A maneira mais fácil de atender as condições é retirar os regressores pertencentes a $\Omega_{y^p u_1^{q_1} u_2^{q_2} \dots u_r^{q_r}}$, $p > 0$ e $\forall q_i, i = 1, 2, \dots, r$. Se houver tais regressores de tais agrupamentos, ainda é possível atender ao Lema 2 impondo que os coeficientes de agrupamentos indesejados sejam nulos (ver Observação 1).

Lema 3 A relação estática (3) será unívoca, polinomial e não possuirá termos cruzados¹ de entrada se, em adição as restrições do Lema 2, os coeficientes de agrupamentos cruzados forem nulos, ou seja, $\sum_{u_1^{q_1} u_2^{q_2} \dots u_r^{q_r}} = 0$.

Prova: Atendida a restrição do Lema 2 a relação estática será unívoca, polinomial e poderá ser escrita como mostrado na Eq. 5. Seja:

$$\begin{aligned} \sum_i C'_i \bar{u}_1^{q_{1,i}} \bar{u}_2^{q_{2,i}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,i}} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^l c'_{i,j} \bar{u}_i^j + K_0 + \\ &+ \sum_{\substack{k \\ q_{i,k} \neq 0 \text{ e } q_{j,k} \neq 0, i \neq j}} C'_k \bar{u}_1^{q_{1,k}} \bar{u}_2^{q_{2,k}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,k}}, \end{aligned}$$

sendo que K_0 é uma constante e $c'_{i,j} = \sum_{u_i^j} / (1 - \Sigma_y)$. O segundo somatório só contém termos cruzados, e portanto, pela condição do Lema 3 será igual a zero. Logo a Eq. 5 simplifica-se para:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^l c'_{i,j} \bar{u}_i^j + K_0. \quad (6)$$

\square

Observação 3 Para poder escrever a característica estática na forma (6) é necessário que os coeficientes de agrupamentos cruzados (saída-entradas, vide Lema 2; e entre sinais de entrada, vide Lema 3) sejam nulos. Isso pode ser alcançado facilmente eliminando do modelo regressores pertencentes a esses agrupamentos, ou incluindo-os e impondo –usando restrições de igualdade na estimação de parâmetros– que a soma de seus respectivos parâmetros seja nula.

3.2 Relação estática do modelo de Hammerstein

Tendo obtido a relação estática de uma classe de modelos NARX MISO (Eq. 6), deseja-se agora obter a relação estática de modelos de Hammerstein, começando pela representação EJM. O bloco ARX MISO dos modelos EJM e KU é:

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n_y} a_j y(k-j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_v} b_{i,j} v_i(k-j). \quad (7)$$

Assumindo estabilidade assintótica, a análise em estado estacionário considera:

$$u_i(k) = \bar{u}_i, i = 1, 2, \dots, r, \forall k,$$

$$v_i(k) = \bar{v}_i, i = 1, 2, \dots, m, \forall k,$$

$$y(k) = \bar{y}, \forall k.$$

¹Termos cruzados envolvem mais de uma variável. Exemplos no caso dinâmico são: $u_1(k-i)u_2(k-j)$, $y(k-i)u(k-j)$. Contraexemplo: $u_1(k-i)u_1(k-j)$ e $u(k-j)$ não são termos cruzados. A definição é análoga para o caso estático.

Substituindo esses valores em (7), obtém-se a relação em estado estacionário do modelo:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^m \gamma_i \bar{v}_i = \gamma_1 \bar{v}_1 + \gamma_2 \bar{v}_2 + \dots + \gamma_m \bar{v}_m, \quad (8)$$

em que as constantes γ_i são dadas por:

$$\gamma_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_v} b_{i,j}}{1 - \sum_{j=1}^{n_y} a_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n_v} b_{i,j}}{1 - \Sigma_y}.$$

No modelo de Hammerstein EJJ, as entradas u_i e as variáveis intermediárias v_i estão relacionadas por $\bar{v}_i = f_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r)$ – ver Figura 4 – que, substituída em (8), resulta em:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^m \gamma_i f_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r). \quad (9)$$

Hipótese 1 *No modelo de Hammerstein o ganho estático de todos os canais $v_i(k) \rightarrow y(k)$ do bloco dinâmicos ARX MISO (ver Figura 4) é unitário, ou seja, $\gamma_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$.*

Usando essa hipótese, tem-se para o caso EJJ:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^m f_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r). \quad (10)$$

Com funções estáticas monovariáveis, $\bar{v}_i = f_i(\bar{u}_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$, tem-se para o modelo de KU:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^r f_i(\bar{u}_i). \quad (11)$$

3.3 Identificação de modelos de Hammerstein

Atendido um ou mais dos lemas apresentados pode-se identificar modelos NARX MISO dos quais é possível obter uma expressão paramétrica para a não linearidade estática global (Equações 4, 5 ou 6). Contudo, para escrever o modelo de Hammerstein é necessário reescrever (4), (5) ou (6) em termos de funções estáticas específicas f_i . Conhecidas as funções estáticas, pode-se estimar um modelo ARX MISO seguindo procedimentos clássicos.

Quando o Lema 3 é satisfeito, a não linearidade estática global é dada pela Eq. 6. Neste caso a obtenção do modelo de KU, que apresenta independência entre os canais não lineares estáticos do modelo, é mais adequada, já que em (6) não existem termos cruzados. Para que a relação estática do modelo de KU (11) seja igual à relação estática global (6):

$$\sum_{i=1}^r f_i(\bar{u}_i) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^l c'_{i,j} \bar{u}_i^j + K_0,$$

de onde se tem uma estimativa única (exceto por uma constante) para a função f_i :

$$f_i(\bar{u}_i) = \sum_{j=1}^l c'_{i,j} \bar{u}_i^j + K_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r, \quad (12)$$

em que

$$\sum_{i=1}^r K_i = K_0. \quad (13)$$

Matematicamente, a escolha dessas constantes K_i é arbitrária desde que a condição (13) seja respeitada. Em alguns casos práticos, contudo, a determinação de K_i deve levar em conta a interpretação física das relações estáticas, como será ilustrado na Seção 4.

As condições do Lema 3 incluem as do Lema 2 que, por sua vez, incluem as do Lema 1. Quando apenas o Lema 1 é atendido, a não linearidade estática global será dada por (4) e a representação de EJJ é mais adequada. Assim, qualquer conjunto de funções f_i , para as quais a relação estática do modelo de EJJ (10) seja igual à relação estática global (4), isso é, que atenda:

$$\sum_{i=1}^m f_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r) = \frac{\sum_i C_i \bar{u}_1^{q_{1,i}} \bar{u}_2^{q_{2,i}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,i}}}{1 - \sum_j C_j \bar{u}_1^{q_{1,j}} \bar{u}_2^{q_{2,j}} \dots \bar{u}_r^{q_{r,j}}}$$

é uma possibilidade válida para ser usada na representação de Hammerstein de EJJ. Tais funções estáticas serão racionais em consequência dos termos cruzados saída-entrada. Porém, diferente da representação KU, o conjunto de funções estáticas que satisfazem a última igualdade não é único.

Quando o Lema 2 for atendido, mas o Lema 3 não, a não linearidade global será dada por (5). A presença de termos cruzados entrada-entrada sugere que o modelo de EJJ é a representação mais adequada. A ausência de termos cruzados saída-entradas garante que a relação estática do modelo NARX é polinomial. Sendo assim, o conjunto de funções f_i procurado deve satisfazer igualdade de (10) e (5). A solução da referida igualdade tampouco é única, o que ainda representa um problema em aberto na obtenção de modelo de EJJ pelo método aqui apresentado.

4 Estudo de Caso

Nesta seção, o procedimento desenvolvido será ilustrado usando dados de um poço de petróleo para o qual será obtido um modelo de Hammerstein MISO (representação de KU). Como índice de erro será usado o MAPE (*mean absolute percentage error*) dado por:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{|y(k) - \hat{y}(k)|}{\langle y \rangle} \times 100\%. \quad (14)$$

Em que $y(k)$ é o k -ésimo valor obtido experimentalmente, $\hat{y}(k)$ é a predição livre do modelo e $\langle y \rangle$ é o valor médio de y .

No procedimento de extração do petróleo utiliza-se uma técnica de elevação artificial, denominada *gas lift*. Que consiste em injetar gás natural, diminuindo a densidade do óleo, e assim, auxiliando no escoamento dos fluidos do reservatório até a superfície. O petróleo retirado é uma função não linear do gás injetado e varia de poço para poço (Ray and Sarker, 2007).

Neste exemplo, dados coletados de uma plataforma de petróleo a uma taxa de amostragem de 1 minuto, serão usados na construção de um modelo não linear de Hammerstein (ver figuras 5 e 6). A variável de saída y é a pressão PDG (*Permanent Downhole Gauge*). As variáveis de entrada são a pressão de *gas lift*, u_1 , e temperatura na válvula de choke, u_2 . A escolha inesperada de u_2 como entrada justifica-se, neste caso em que o poço apresenta golfadas severas, por estar correlacionada com a saída. A entrada u_2 carrega informação das golfadas inexistente em u_1 .

O primeiro passo para obter o modelo de Hammerstein é a identificação de um modelo NARX MISO. Para isso foi gerado um conjunto de termos candidatos com $l = 3$, $n_{u_1} = n_{u_2} = 4$ e $n_y = 5$, que são valores razoavelmente padrão ajustados por tentativa e erro. Agrupamentos foram omitidos desse conjunto de termos candidatos de forma a atender ao Lema 3. Dentre os termos candidatos, a escolha dos termos mais adequados e a estimação de parâmetros foi realizada usando técnicas ortogonais (Chen et al., 1989; Korenberg et al., 1988). O modelo obtido é:

$$\begin{aligned} y(k) = & 1,6688y(k-1) - 0,5884y(k-2) \\ & + 0,0868y(k-5) + 0,1855u_2(k-1) \\ & - 1,1017u_2(k-2) - 0,0045u_2^3(k-1) \\ & - 0,1822y(k-3) + 0,1578u_2^2(k-2) \\ & - 0,0163u_1(k-4) + 0,0001u_1^2(k-1) \\ & + 0,4476u_2(k-3) + 2,8562 \\ & - 0,0005u_2(k-2)u_2(k-3)u_2(k-4) \\ & - 0,0864u_2^2(k-3) + 0,0085u_2^2(k-1)u_2(k-4) \\ & + 0,0020u_2^2(k-3)u_2(k-4) + 0,0035u_2^3(k-3) \\ & + 0,0097u_2(k-1)u_2(k-2)u_2(k-4) \end{aligned} \quad (15)$$

cuja análise estática resulta em:

$$\begin{aligned} \bar{y} = & 0,0052\bar{u}_1^2 - 1,0877\bar{u}_1 - 0,2124\bar{u}_2^3 + \\ & 4,7578\bar{u}_2^2 - 31,2152\bar{u}_2 + 190,2796. \end{aligned} \quad (16)$$

Para obter as funções estáticas desejadas os termos relativos a \bar{u}_1 foram separados daqueles com termos relativos a \bar{u}_2 , tal que $\bar{y} = f_1(\bar{u}_1) + f_2(\bar{u}_2)$, obtendo as seguintes funções (ver Figura 7):

$$f_1(\bar{u}_1) = 0,0052\bar{u}_1^2 - 1,0877\bar{u}_1 + 131,0690, \quad (17)$$

$$f_2(\bar{u}_2) = -0,2124\bar{u}_2^3 + 4,7578\bar{u}_2^2 - 31,2152\bar{u}_2 + 59,2107. \quad (18)$$

As constantes $K_1 = 131,0690$ e $K_2 = 59,2107$ em (17) e (18), foram escolhidas usando os seguintes

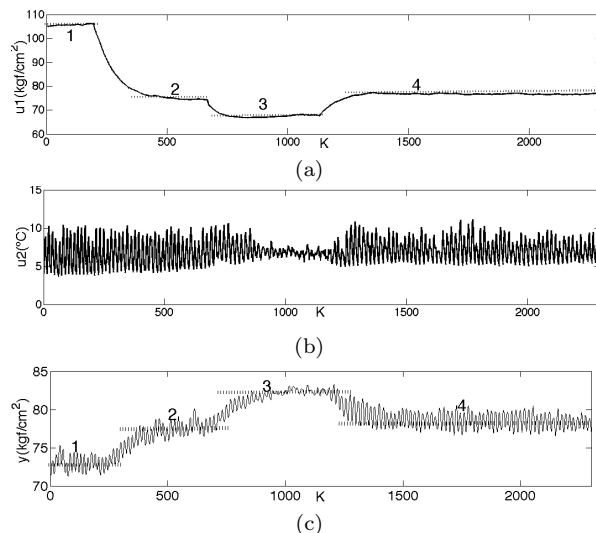


Figura 5: Dados de identificação: (2301 amostras) (a) entrada u_1 ; (b) entrada u_2 ; (c) saída y .

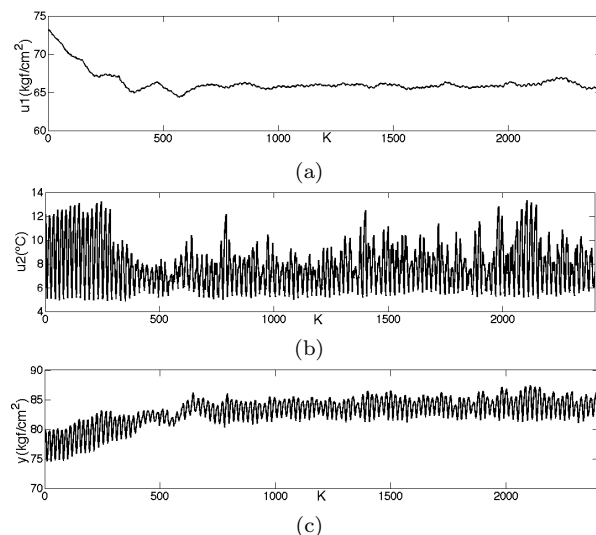


Figura 6: Dados de validação: (2401 amostras) (a) u_1 ; (b) u_2 ; (c) y .

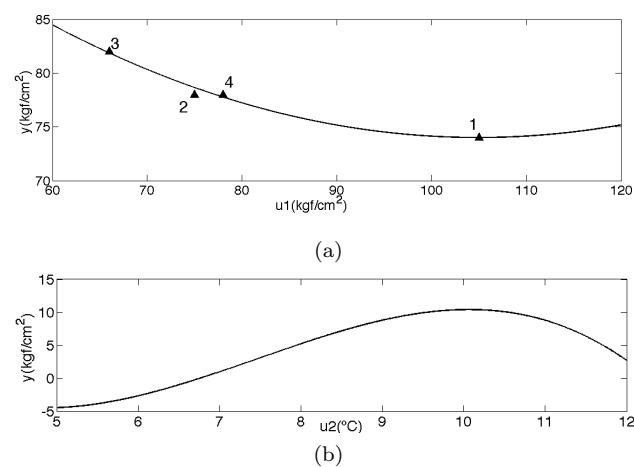


Figura 7: Funções estáticas: (a) $f_1(\bar{u}_1)$ e os triângulos representam as relações estáticas da Fig. 5a e 5c; (b) $f_2(\bar{u}_2)$.

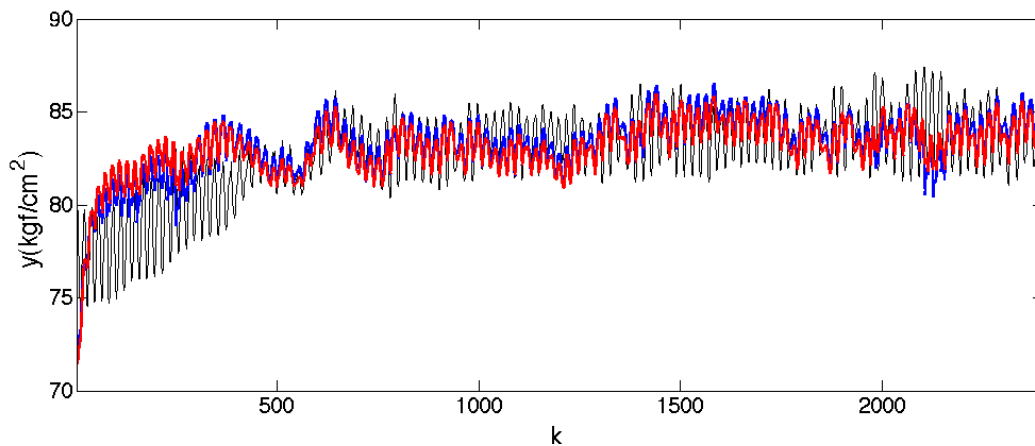


Figura 8: Dados de validação: Dados medidos em preto, simulação livre do modelo de Hammerstein em azul (MAPE = 1,43%) e simulação livre do modelo NARX (MAPE = 1,34%) em vermelho.

critérios: i) K_2 é tal que seja atendida a restrição:

$$f_2(\langle u_2 \rangle) = 0, \quad (19)$$

sendo que $\langle u_2 \rangle = 6,76$ é o valor médio de u_2 na janela de identificação (Fig. 5b); ii) $K_1 = K_0 - K_2$ (ver Eq. 13), sendo que $K_0 = 190,2796$ é obtida da relação estática (16).

O critério (19) foi motivado pelo fato de u_2 ser aproximadamente estacionário em relação à média na janela de identificação, ou seja, $\bar{u}_2 \approx \langle u_2 \rangle$. Assim, a condição (19) impõe que f_2 não deve ter valor significativo ao longo da janela de identificação de modo que f_1 será responsável por explicar as variações em \bar{y} . Assim, a relação entre os patamares estáticos mostrados e numerados nas Figuras 5a e 5c será adequadamente descrita pela função f_1 (Fig. 7a).

Em posse das funções estáticas podemos obter as variáveis intermediárias v_1 e v_2 e o modelo ARX MISO que relaciona estas com a saída y . Esse modelo ARX tem os mesmos atrasos do caso não linear ($n_{v_1} = n_{v_2} = 4$ e $n_y = 5$):

$$\begin{aligned} y(k) = & 0,0147v_1(k-4) + 0,0288v_2(k-1) \\ & - 0,0161v_2(k-2) + 1,8797y(k-1) \\ & - 0,9879y(k-2) + 0,0934y(k-5) \end{aligned} \quad (20)$$

A simulação livre do modelo de Hammerstein e do modelo NARX a partir do qual ele foi obtido estão mostradas na Figura 8.

Observação 4 A análise em estado estacionário da Eq. 20 resulta em:

$$\bar{y} = 0,99\bar{v}_1 + 0,86\bar{v}_2,$$

corroborando com a Hipótese 1, de que os ganhos são próximos da unidade.

5 Conclusão

Neste trabalho foram estabelecidas as condições necessárias para obter funções estáticas polinomiais ou racionais a partir de um modelo NARX

MISO. Dado um tipo de função estática desejada, os resultados, apresentados como lemas, limitam as classes de modelos NARX MISO possíveis.

Como subproduto, é proposto um método para obter modelos de Hammerstein MISO, que consiste nos seguintes passos: i) identificar um modelo NARX que atenda as restrições impostas nos lemas deste artigo; ii) obter a relação estática do modelo NARX e, a partir dela, a função não linear estática do modelo de Hammerstein; iii) de posse da não linearidade do modelo, obter um conjunto de variáveis intermediárias que permitem obter um modelo ARX MISO que relacione estas com a saída.

Um dos pontos chave é a obtenção de um modelo NARX polinomial que descreva o sistema satisfatoriamente. O esforço adicional de estimar um modelo Hammerstein para casos em que já existe um bom modelo NARX se justifica pela conveniência do modelo de blocos orientados em aplicações de controle (Fruzzetti et al., 1997).

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do CNPq e da Petrobras.

Referências

- Aguirre, L. A. (2007). *Introdução a identificação de sistemas: técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais*, 3rd edn, Editora UFMG.
- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1995). Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering, *International Journal Of Control* **62**(3): 569–587.
- Aguirre, L. A., Coelho, M. C. S. and Correa, M. V. (2005). On the interpretation and practice

- of dynamical differences between Hammerstein and Wiener models, *IEEE Proceedings on Control Theory and Applications* **152**(4): 349 – 356.
- Bai, E.-W. (2002). Identification of linear systems with hard input nonlinearities of known structure, *Automatica* **38**(5): 853 – 860.
- Bai, E.-W. (2004). Decoupling the linear and nonlinear parts in Hammerstein model identification, *Automatica* **40**(4): 671 – 676.
- Billings, S. A. and Fakhouri, S. Y. (1978). Identification of a class of nonlinear systems using correlation analysis, *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of* **125**(7): 691–697.
- Boutayeb, M. and Darouach, M. (1995). Recursive-identification method for MISO Wiener-Hammerstein model, *IEEE Transactions On Automatic Control* **40**(2): 287–291.
- Chang, F. and Luus, R. (1971). A noniterative method for identification using Hammerstein model, *IEEE Transactions on Automatic Control* **16**(5): 464–468.
- Chen, S., Billings, S. A. and Luo, W. (1989). Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification, *International Journal of Control* **50**(5): 1873–1896.
- Dempsey, E. J. and Westwick, D. T. (2004). Identification of Hammerstein models with cubic spline nonlinearities, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **51**(2): 237–245.
- Ding, F. and Chen, T. W. (2005). Identification of Hammerstein nonlinear ARMAX systems, *Automatica* **41**(9): 1479–1489.
- Eskinat, E., Johnson, S. H. and Luyben, W. L. (1991). Use of Hammerstein models in identification of nonlinear systems, *AIChE Journal* **37**(2): 255–268.
- Fruzzetti, K. P., Palazoğlu, A. and McDonald, K. A. (1997). Nonlinear model predictive control using Hammerstein models, *Journal of Process Control* **7**(7): 31–41.
- Goethals, I., Pelckmans, K., Suykens, J. A. K. and Moor, B. D. (2005). Identification of MIMO Hammerstein models using least squares support vector machines, *Automatica* **41**(7): 1263 – 1272.
- Gómez, J. C. and Baeyens, E. (2004). Identification of block-oriented nonlinear systems using orthonormal bases, *Journal of Process Control* **14**(6): 685 – 697.
- Harnischmacher, G. and Marquardt, W. (2007). A multi-variate Hammerstein model for processes with input directionality, *Journal of Process Control* **17**(6): 539 – 550.
- Hunter, I. W. and Korenberg, M. J. (1986). The identification of nonlinear biological-systems - Wiener and Hammerstein cascade models, *Biological Cybernetics* **55**(2-3): 135–144.
- Janczak, A. (2003). Neural network approach for identification of Hammerstein systems, *International Journal of Control* **76**(17): 1749–1766. cited By (since 1996)20.
- Korenberg, M., Billings, S. A., Liu, Y. P. and McIlroy, P. J. (1988). Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems, *International Journal of Control* **48**(1): 193–210.
- Kortmann, M. and Unbehauen, H. (1987). Identification methods for nonlinear MISO systems., *10th IFAC World Congress. Munich (FRG)*, pp. 233–238.
- Lakshminarayanan, S., Shah, S. L. and Nandakumar, K. (1995). Identification of Hammerstein models using multivariate statistical tools, *Chemical Engineering Science* **50**(22): 3599 – 3613.
- Leontaritis, I. J. and Billings, S. A. (1985a). Input-output parametric models for nonlinear systems part i: deterministic nonlinear systems, *International Journal of Control* **41**(2): 303–328.
- Narendra, K. S. and Gallman, P. (1966). An iterative method for identification of nonlinear systems using a Hammerstein model, *IEEE Transactions on Automatic Control* **11**(3): 546 – 550.
- Ray, T. and Sarker, R. (2007). Genetic algorithm for solving a gas lift optimization problem, *Journal of Petroleum Science and Engineering* **59**(1–2): 84 – 96.
- Rollins, D. K., Bhandari, N., Bassily, A. M., Colver, G. M. and Chin, S.-T. (2003). A continuous-time nonlinear dynamic predictive modeling method for Hammerstein processes, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **42**(4): 860–872.
- Su, H. T. and McAvoy, T. J. (1993). Integration of multilayer perceptron networks and linear dynamic models: a hammerstein modeling approach, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **32**(9): 1927–1936.